

Untersuchungen über rotierende Sterne

II. Die Theorie erster Ordnung

Habilitationsschrift
zur Erlangung der Venia legendi
an der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität
in Erlangen

vorgelegt von

Rudolf Kippenhahn

1958

Dekan: Univ.-Prof. Dr. R. Fleischmann

1. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr. L. Biermann, Göttingen

2. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr. P. ten Bruggencate, Göttingen

3. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr. C. F. v. Weizsäcker, Göttingen



Tag des Colloquiums: 22. 2. 1958

Tag der Probevorlesung: 17. 5. 1958

Sonderdruck aus:

Zeitschrift für Astrophysik, Bd. 46, S. 26—65 (1958)

Kleine Veröffentlichungen der Remeis-Sternwarte Bamberg
Nr. 20

Untersuchungen über rotierende Sterne

II. Die Theorie erster Ordnung[★]

Von

R. KIPPENHAHN

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 20. Mai 1958)

[★] Die Arbeit wurde im Januar 1957 an der Remeis-Sternwarte Bamberg abgeschlossen und der Universität Erlangen als Habilitationsschrift vorgelegt.

Es werden die Gleichungen diskutiert, die bei Strahlungsgleichgewicht das Rotationsgesetz eines Sterns bestimmen, wobei die im Verhältnis von Fliehkraft zu Schwerkraft linearen Glieder berücksichtigt werden. Für das Standardmodell wird das System der meridionalen Zirkulationen zu vorgegebener nichtstarrer Rotation hergeleitet und in zwei Beispielen numerisch bestimmt. Die Rückwirkung der meridionalen Zirkulationen auf das Rotationsgesetz wird als lineare Störung behandelt (linearisierte Theorie erster Ordnung). Für das Standardmodell wird ein numerisches Beispiel für das Rotationsgesetz unter Berücksichtigung der linearen Rückwirkung der meridionalen Zirkulationen gelöst. Ein in der früher veröffentlichten Theorie nullter Ordnung bewiesener Satz über das Rotationsgesetz, das ein Stern nach hinreichend langer Zeit erreicht, läßt sich auf die linearisierte Theorie erster Ordnung übertragen. Die linearisierte Theorie erster Ordnung ist nur bei hinreichend langsamer Rotation anwendbar. Bei rascherer Rotation, bei der die Corioliskräfte der meridionalen Zirkulation die Größenordnung der Reibung erreichen, wird die Bewegungsgleichung in der Winkelgeschwindigkeit ω nichtlinear (nichtlineare Theorie erster und höherer Ordnung). Hierfür werden einige allgemeine Aussagen hergeleitet.

1. Einleitung

In Fortsetzung des früher veröffentlichten Teils I (1955, im folgenden mit I zitiert), in dem die Theorie nullter Ordnung der Sternrotation beschrieben wurde, soll hier die Theorie erster Ordnung dargestellt werden. Wie in I beschränken wir uns auf Bereiche im Strahlungsgleichgewicht und schalten die Möglichkeit der Einwirkung magnetischer Kräfte aus. Wie in der früheren Arbeit, so wollen wir auch hier nur *grundsätzliche Verfahrensfragen* zu klären versuchen und damit eine Ausgangsbasis schaffen, um von da aus die bei wirklichen Sternen auftretenden komplizierteren Probleme besser in Angriff nehmen zu können.

Als Theorie erster Ordnung definieren wir die Rotationstheorie eines Sternmodells, bei dem in den Aufbaugleichungen zwar die Größe

$\chi = \frac{\bar{\omega}^2}{2\pi G \bar{\rho}}$ berücksichtigt, ihre höheren Potenzen dagegen vernachlässigt werden. Das so formulierte Problem besitzt zwei Hauptschwierigkeiten, von denen die eine astrophysikalischer, die andere rein mathematischer Natur ist.

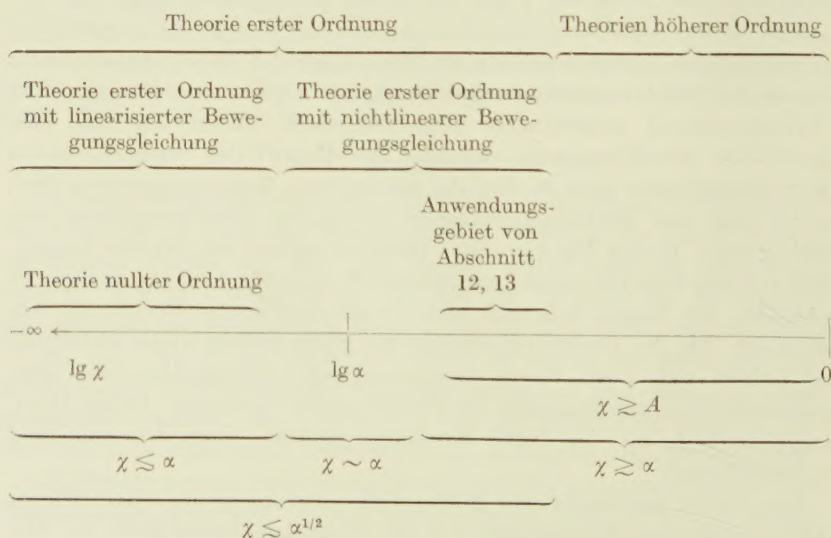
Die astrophysikalische Schwierigkeit hängt damit zusammen, daß sich ein vom Anfangszustand unabhängiges Rotationsgesetz möglicherweise erst in Zeiträumen einstellt, welche die des Weltalters weit überschreiten, so daß es also denkbar ist, daß fast alle Sterne ein von ihrem Anfangszustand abhängiges Rotationsgesetz besitzen. In solchen Fällen könnten uns die Gleichungen der Hydrodynamik keine wichtigen Informationen über die zu erwartenden Rotationsgesetze liefern, so lange man nicht irgendwelche Annahmen über die Sternentstehung zugrunde legt. Die Frage, ob das Rotationsgesetz eines Sterns vom Anfangszustand abhängt oder nicht, kann aber erst beantwortet werden, wenn man mehr über die Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen weiß. Wenn z. B. die meridionalen Zirkulationen während ihrer mittleren Umlaufsperiode einen großen Teil der Gesamtmaterie des Sterns durch Bereiche hindurchführt, deren Viskosität sehr hoch ist (z. B. durch instabile Bereiche, in denen die turbulente Viskosität maßgebend ist), dann wird die Einstellzeit des endgültigen Rotationsgesetzes wesentlich verkürzt. Aber auch wenn sich einmal sicher herausstellen sollte, daß das Rotationsgesetz eines Sterns ein „fossiler“ Überrest des Anfangszustandes ist, bleiben Fragen wie die nach dem System der meridionalen Strömungen bei vorgegebenem Rotationsgesetz ω immer noch bedeutungsvoll.

Wie in I für die Theorie nullter Ordnung des Standardmodells bewiesen wurde, strebt ein Stern aus jedem beliebigen Anfangsrotationsgesetz heraus nach hinreichend langer Zeit einem vom Anfangszustand unabhängigen Rotationsgesetz zu, das wegen des Drehimpulsverlustes durch den Strahlungsstrom zeitabhängig ist. Dieses zeitabhängige, vom Anfangszustand unabhängige Rotationsgesetz wollen wir das *ausgezeichnete* Rotationsgesetz nennen. Der Begriff des ausgezeichneten Rotationsgesetzes geht in den des stationären Rotationsgesetzes über, wenn man den Drehimpulstransport durch den Strahlungsstrom vernachlässigt. In der Theorie erster Ordnung werden wir für den Sonderfall, bei dem man mit einer linearisierten Bewegungsgleichung auskommt (Abschn. 10), zeigen, daß auch hier ein ausgezeichnetes Rotationsgesetz existiert. Da der Drehimpulsverlust den Stern immer weiter abbremst, so nähert sich auch dieses Rotationsgesetz asymptotisch dem ausgezeichneten Rotationsgesetz der Theorie nullter Ordnung. Andere Drehimpulsverluste als der durch Strahlung sind in dieser Untersuchung vernachlässigt.

Die zweite, mathematische Schwierigkeit beruht in der Rückwirkung der meridionalen Strömungen auf die Winkelgeschwindigkeit ω . Die

Geschwindigkeitskomponenten der meridionalen Zirkulationen hängen in sehr komplizierter Weise von der Winkelgeschwindigkeit und deren mehrfachen räumlichen Ableitungen ab. Andererseits beeinflussen die meridionalen Geschwindigkeitskomponenten durch die Coriolis-Kräfte die Winkelgeschwindigkeit. Eine Lösung der damit gestellten Aufgabe muß vorläufig an der Schwierigkeit des Problems scheitern, wenn man sich nicht auf einfache Spezialfälle und Näherungen beschränkt. So werden wir in Abschnitt 10 den einfacheren Fall der linearisierten φ -Komponente der Bewegungsgleichung behandeln. In diesem Fall beginnt man mit einer Näherung des Rotationsgesetzes, berechnet dazu die meridionalen Zirkulationen und bestimmt die Verbesserung der Winkelgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der Coriolis-Kräfte. Für hinreichend langsame Rotation erhält man so eine konsistente Lösung. Für das Standardmodell ist dies in Abschnitt 10 numerisch durchgeführt. Geht die Rotation nicht so extrem langsam vor sich, so lassen sich nur noch allgemeine Aussagen über den zu erwartenden ausgezeichneten Rotationszustand herleiten. Für den Fall, daß die Coriolis-Kräfte die Reibung im Mittel weit überschreiten, läßt sich unter gewissen plausiblen Annahmen (Abschn. 11) zeigen, daß der Stern ein Rotationsgesetz anstrebt, bei dem auf jeder meridionalen Stromlinie mit Ausnahme achsennaher Bereiche $\Omega = \omega r^2 \sin^2 \vartheta$ nahezu konstant ist. Dieser Typus von Rotationsgesetzen verringert in gewissen Bereichen des Sterns die dynamische Stabilität (Abschn. 12).

Die Geschwindigkeitsbereiche, in denen die verschiedenen Verfahren und Näherungen anwendbar sind, skizziert das folgende Schema.



Dabei haben wir die dimensionslose Größe $\frac{\bar{\nu} G M^2}{L R^3} = \alpha$ und die Größe

$$\max \left(\alpha, \frac{F G M^2}{c^2 \bar{\rho} L R^2} \right) = A$$

gesetzt (ν kinematische Zähigkeit, G Gravitationskonstante, M Sternmasse, R Sternradius, L Leuchtkraft, F Strahlungsstrom). χ/α stellt das Verhältnis der Zeitskala der Reibung zu der Umlaufperiode der meridionalen Zirkulationen dar, χ/A das Verhältnis der Zeitskala von Reibung plus Drehimpulstransport durch den Strahlungsstrom zur meridionalen Umlaufperiode. Wenn $\chi \lesssim \alpha$ ist*, dann reicht die Theorie nullter Ordnung zur Beschreibung des Rotationszustandes aus. Die Theorie erster Ordnung beschreibt den Rotationszustand so lange, bis die meridionalen Strömungen, die von den in χ quadratischen Gliedern herrühren, in die Größenordnung der Reibungskräfte kommen. Das Verhältnis der von den Gliedern zweiter Ordnung herrührenden Corioliskräfte zur Reibung ist etwa $\chi \cdot \chi/\alpha$, also beschreibt die Theorie erster Ordnung nur solange den Rotationszustand, wie $\chi \lesssim \alpha^{1/2}$ gilt. Für größere Werte von χ können nur Theorien höherer Ordnung das Rotationsgesetz beschreiben. In der Theorie erster Ordnung kann man für $\chi \lesssim \alpha$ noch mit einer linearisierten Bewegungsgleichung rechnen, für $\chi \sim \alpha$ und $\chi \gtrsim \alpha$ hat man nur die nichtlineare Gleichung. Das hier angegebene Schema beschreibt die Verhältnisse nur grob, da α/χ z. B. in der Nähe der Oberfläche eines Sterns stark variieren kann. Unser Schema bezieht sich daher nur auf mittlere Bereiche, des Sterns, etwa bei $r \approx R/2$.

In Tab. 1 wurden für mehrere Spektraltypen $\bar{\chi}$ und $\bar{\alpha}$ zusammengestellt. Der Tabelle liegen für die Rotationsgeschwindigkeiten und die Zustandsgrößen der Sterne die Tafeln von ALLEN (1955) zugrunde. Man ersieht daraus, daß die Sterne mit Ausnahme des Spektraltypus G (und aller späteren Typen) im Mittel zu rasch rotieren, als daß die Theorie erster Ordnung zur Beschreibung des Rotationszustandes ausreicht. Bei den für ihren Spektraltyp langsam rotierenden Sternen (bei denen also die Rotationsgeschwindigkeit unter dem Mittelwert des Spektraltyps liegt) kann man jedoch erwarten, daß sie noch im Bereich $\chi < \alpha^{1/2}$ liegen und damit von der Theorie erster Ordnung erfaßt werden können. Dies ist sicher auch bei allen G - und späteren Sternen der Fall. Auch hier müssen wir uns wieder bewußt bleiben, daß dies nur für die mittleren Bereiche der Sterne gilt und daß man einen Stern in seiner Gesamtheit nicht einfach in unser Schema einordnen kann, sondern daß verschiedene Zonen des Sterns in verschiedenen Bereichen unseres Schemas liegen können.

* Das Symbol $\lesssim$ bedeutet hier und im folgenden „größenordnungsmäßig kleiner“, $\sim$ bedeutet „von gleicher Größenordnung wie“.

Tabelle 1

Spektrum	$\log T_e^1$	$\log \bar{T}^2$	$\log \bar{v}^3$	$\log \bar{v}_m^4$	$\log \bar{v}_R^5$	$\log(\bar{v}_m + \bar{v}_R)$	$\log \alpha^6$	$\log M/M_\odot^7$	$\log T/T_\odot^8$	$\log R/R_\odot^9$	$\log \left(\frac{\bar{F} G M^2}{c^2 \bar{v} L R^2} \right)^{10}$	$\log \bar{\chi}_{mitt}$	$\log \chi_{max}$
Oe, Be	7.48	6.88	-1.6	3.40	7.5	7.5	-3.4	1.2	3.9	0.95	-5.2	-0.54	+1.80
O, B												-1.90	-0.82
A	7.34	6.74	-0.5	1.92	3.3	3.3	-5.1	0.39	1.6	0.30	-5.3	-1.54	-0.50
F0—F2	7.30	6.70	-0.3	1.64	2.3	2.4	-5.2	0.19	0.8	0.17	-5.4	-2.16	-0.56
F5—F8	7.28	6.68	-0.2	1.50	2.0	2.1	-5.0	0.10	0.4	0.09	-5.4	-2.88	-1.58
dG	7.25	6.65	0.0	1.20	1.1	1.5	-5.4	0.01	0.2	0.01	-5.4	— ∞	-3.92
Sonne	7.30	6.70	0.15	1.20	1.13	1.47	-5.2	0	0	0	-5.55	$\log \chi = -4.92$	

¹ ALLER (1955), S. 188, 132.² $\bar{T} = 0.25 T_*$.³ ALLER (1955), S. 185.⁴ $\bar{v}_m = 10^{-15.4} \bar{T}^{5/2} \bar{v}^{-1}$,⁵ $\bar{v}_R = 10^{-55.4} T^{8.5} \bar{v}^{-2.8}$.⁶ $\log \alpha = -6.67 + \log(\bar{v}_m + \bar{v}_R) + 2 \log(M/M_\odot) - \log(L/L_\odot) - 3 \log(R/R_\odot)$.⁷ $\log \left(\frac{\bar{F} G M^2}{c^2 \bar{v} L R^2} \right) = -5.40 + 2 \log(M/M_\odot) - 4 \log R/R_\odot - \log \bar{v}$.

Die Ausdrücke für v_m und v_R wurden von TEMESVÁRY (1952) übernommen. Beide Ausdrücke hängen noch von der chemischen Zusammensetzung ab, worauf hier keine Rücksicht genommen wurde.

Da χ bei allen Sternen, bei denen eine Theorie erster Ordnung überhaupt ausreicht, ≤ 1 ist, so kann man in der φ -Komponente der Bewegungsgleichung die Größen, welche den Aufbau des Modells beschreiben, wie Dichte, Strahlungsstrom usw. und die damit in direktem Zusammenhang stehenden Größen, wie die Zähigkeit von der Theorie des nichtrotierenden Modells übernehmen. Der Fehler, den man dabei macht, wirkt sich in ω etwa um den Betrag $\chi \omega$ aus und ist in den durch die Rotation hervorgerufenen Störungen des Aufbaues in χ von höherer Ordnung (vgl. Abschn. 4).

Im Anhang sind alle von uns benutzten Abkürzungen und Relationen für Kugelfunktionen zusammengestellt. Jede von uns in den folgenden Abschnitten numerisch angegebene mit einer Dimension behafteten Größe ist in cgs-Einheiten angegeben. Punkte über einer Funktion bedeuten (lokale) Zeitableitungen, Striche bedeuten Ableitungen nach r (bzw. beim Standardmodell nach z).

2. Die mechanischen Gleichungen

Die Bewegung der Sternmaterie unter Berücksichtigung örtlich variabler Viskosität η wird durch das System der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} \mathbf{v} - \varrho [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] + \varrho \operatorname{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathfrak{f} + \operatorname{grad} II + \operatorname{Div} \mathfrak{T} - \frac{4}{3} \eta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ + \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{grad} \eta - \operatorname{rot} [\mathbf{v} \operatorname{grad} \eta] - \operatorname{grad} (\mathbf{v} \operatorname{grad} \eta) + \\ + \mathbf{v} \Delta \eta = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(ϱ Dichte, $\mathbf{v}$ Geschwindigkeit, II Gesamtdruck) beschrieben, zu denen noch die Kontinuitätsgleichung hinzukommt, die wir in der Form

$$\operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\varepsilon \varrho}{c^2}, \text{ vgl. Abschn. 5} \right) \quad (2)$$

schreiben wollen. (ε Energieerzeugung, c Lichtgeschwindigkeit). In (1) ist $\mathfrak{f}$ das Feld der äußeren Kräfte, die in unserem Fall allein durch das Gravitationspotential bestimmt sind

$$\mathfrak{f} = -\varrho \operatorname{grad} \Phi. \quad (3)$$

Das Gleichungssystem (1) berücksichtigt die Ortsabhängigkeit der Zähigkeit (TEMESVÁRY 1952) und unterscheidet sich (in kartesischen Koordinaten) von den üblichen Gleichungen durch das Glied $\operatorname{Div} \mathfrak{T}$, dessen Ursache in dem Impulstransport durch den Strahlungsstrom $\mathfrak{f} = (F_x, F_y, F_z)$ liegt, $\mathfrak{T}$ ist der anisotrope Anteil des Strahlungsdruckes, Div die Vektordivergenz. JEANS (1926) hatte gezeigt, daß die Bewegungsgleichungen bereits im Falle reiner Rotation ein Zusatzglied erhalten müssen, das vom Drehimpulstransport durch den Strahlungsstrom herrührt; wir haben das Zusatzglied hier in allgemeiner Form

geschrieben (Verf. 1954); weiter unten in (7) sind für $\text{Div } \mathfrak{T}$ genau die von JEANS angegebenen Glieder eingesetzt (vgl. auch I). Die Viskosität setzt sich zusammen aus der molekularen Reibung η_m und der Strahlungsviskosität η_R . Es ist

$$\eta = \eta_m + \eta_R = c_0 T^{5/2} + \frac{2}{15} \frac{a T^4}{c \kappa \varrho} \quad (\text{vgl. I}). \quad (4)$$

Die meridionalen Komponenten der Bewegungsgleichung werden wir im folgenden nur in vereinfachter Form benutzen. Die meridionalen Geschwindigkeitskomponenten werden sich nämlich in dem weitaus größten Bereich des Sterns als so klein erweisen, daß ihre Reibungs-, Strahlungs-Impulstransport- und Trägheitsglieder in den meridionalen Komponenten der Bewegungsgleichung wesentlich kleiner als die Fliehkraft und als das χ -fache von Druck und Schwerkraft sein werden. Wir setzen daher in meridionalen Ebenen reines hydrostatisches Gleichgewicht unter Berücksichtigung der Fliehkraft an und erhalten

$$-\varrho \omega^2 r \sin^2 \vartheta + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Pi}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

$$-\varrho \omega^2 r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} = 0, \quad (6)$$

während man für die φ -Komponente (vgl. I)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho \omega}{\partial t} + \varrho v_r \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} + \varrho v_\vartheta \frac{1}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta} + \frac{1}{c^2 r^4} \frac{\partial (r^4 F r \omega)}{\partial r} - \\ - \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r^4 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^3 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\eta \sin^3 \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

bekommt. Bei allen mit Hilfe der vereinfachten Gleichungen (5), (6) berechneten meridionalen Zirkulationen muß man sich jedoch nachträglich vergewissern, daß die als Lösung erhaltenen Geschwindigkeitskomponenten mit den den Gleichungen (5), (6) zugrunde liegenden Voraussetzungen vereinbar sind. Zu der Gleichung (1) bzw. zu (5), (6) kommt schließlich noch die Gleichung für das Gravitationspotential Φ . Es genügt im Sterninnern der Poissonschen Gleichung

$$\Delta \Phi = 4\pi G \varrho, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8)$$

und außerhalb des Sterns der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta \Phi = 0.$$

3. Die thermodynamischen Gleichungen

Wenn sich die Sternmaterie wie ein ideales Gas verhält, so gilt bei Berücksichtigung des Strahlungsdruckes

$$\Pi = \frac{\Re}{\mu} \varrho T + \frac{1}{3} a T^4. \quad (9)$$

Für den Strahlungsstrom $\mathfrak{f}$ gilt ferner

$$\mathfrak{f} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \text{grad } T. \quad (10)$$

Die Gleichungen (9), (10) gelten für bewegte Sternmaterie genauso wie für unbewegte. Ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Fall der unbewegten Materie tritt jedoch bei der Energiebilanz auf.

Wir betrachten ein Volumenelement V , dessen Oberfläche O mit der Materie mitbewegt und mitdeformiert wird. Die in V enthaltene Materie erleide während eines Zeitelements dt eine Zustandsänderung. Ist $E = c_v \rho T V$ die thermische Energie der in V enthaltenen Materie und dE die Änderung von E während dt , so setzt sich dE zusammen aus der während dt in V erzeugten Energie, der von der Strahlung durch O hindurchtransportierten Energie und aus der mechanischen Arbeit, die verbraucht oder gewonnen wird, wenn sich der Volumeninhalt während dt ändert. Zu Beginn des betrachteten Zeitelements seien die Zustandsgrößen der Materie Π, ρ, T , am Ende $\Pi + d\Pi, \rho + d\rho, T + dT$. Der Volumeninhalt sei dabei von V zu $V + dV$ übergegangen. Wenn Energieerzeugung und Strahlungstransport während dt null sind und man die allgemein in Sternen gültige Näherung verschwindender molekularer Wärmeleitfähigkeit annimmt, so ist die Zustandsänderung rein adiabatisch. Das ist aber nicht der Fall und wir denken uns nun den Übergang von $\Pi, \rho, T, (V)$ nach $\Pi + d\Pi, \rho + d\rho, T + dT, (V + dV)$ auf zwei Wegstrecken des Π, ρ -Diagramms ausgeführt. Auf der Strecke I möge die Materie *adiabatisch* von $\Pi, \rho, T, (V)$ auf den Druck $\Pi + d\Pi$ gebracht werden. Die Zustandsgrößen am Ende der Wegstrecke I seien dann $\Pi + d\Pi, \rho + \delta\rho, T + \delta T, (V + \delta V)$. Daran anschließen möge sich die Wegstrecke II, auf der der Materie bei konstantem Druck $\Pi + d\Pi$, die Energie $(\varepsilon \rho - \text{div } \mathfrak{f}) dt V$ zugeführt werde, welche die Energieerzeugung ε und die Energiezu- bzw. -abfuhr durch den Strahlungsstrom $\mathfrak{f}$ berücksichtigt.

Es sei $d_I E$ die Energieänderung während der Wegstrecke I. Dann folgt wegen der vorausgesetzten Adiabasie

$$d_I E = -\Pi \delta V.$$

Für die Energieänderung $d_{II} E$ während der Wegstrecke II erhält man

$$d_{II} E = (\varepsilon \rho - \text{div } \mathfrak{f}) dt V - \Pi(dV - \delta V),$$

worin der erste Term von Energieerzeugung und Strahlungstransport herrührt, der zweite von der äußeren Arbeit bei der zur Wegstrecke II gehörigen Volumenänderung $dV - \delta V$. Die Gesamtänderung der

Energie ist daher

$$dE = \varrho V \left(c_v + \frac{4aT^3}{\varrho} \right) dT - aT^4 V \frac{d\varrho}{\varrho} = dE_I + dE_{II} = (\varepsilon \varrho - \operatorname{div} \mathbf{f}) V dt - \\ - H(dV - \delta V) - H \delta V, \\ \varrho V \left(c_v + \frac{4aT^3}{\varrho} \right) dT - aT^4 V \frac{d\varrho}{\varrho} = (\varepsilon \varrho - \operatorname{div} \mathbf{f}) V dt + H V \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Da dH sowohl die Druckänderung für das Adiabatenstück ist, wie auch die Druckänderung für die ganze Zustandsänderung während dt , so folgt

$$dH = \frac{\Re}{\mu} \varrho \delta T + \frac{\Re}{\mu} T \delta \varrho + \frac{4}{3} a T^3 \delta T = \frac{\Re}{\mu} \varrho dT + \frac{\Re}{\mu} T d\varrho + \frac{4}{3} a T^3 dT$$

und daraus erhält man bei vollständiger Ionisation

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{4-3\beta}{\beta} \left(\frac{\delta T}{T} - \frac{dT}{T} \right) + \frac{\frac{\beta' c_v}{c_p - c_v} + 12(1-\beta)}{4-3\beta} \frac{\delta T}{T} \\ - \frac{4-3\beta}{\beta} \left(\frac{\delta T}{T} - \frac{dT}{T} \right) + \frac{c_v \varrho T + 4aT^4}{(4-3\beta)H} \frac{\delta T}{T}.$$

Also haben wir

$$\varrho V \left(c_v + \frac{4aT^3}{\varrho} \right) dT = (\varepsilon \varrho - \operatorname{div} \mathbf{f}) V dt + (H + aT^4) V \times \\ \left[\frac{4-3\beta}{\beta} \left(\frac{\delta T}{T} + \frac{dT}{T} \right) + \frac{c_v \varrho T + 4aT^4}{(4-3\beta)H} \frac{\delta T}{T} \right]$$

und nach einigen Umformungen

$$\varepsilon \varrho - \operatorname{div} \mathbf{f} = \left[c_v - \left(\frac{4-3\beta}{\beta} + 16 \frac{1-\beta}{\beta^2} \right) (c_p - c_v) \right] \varrho \left(\frac{\delta T}{dt} - \frac{dT}{dt} \right). \quad (11)$$

Hierbei ist die Zeitableitung d/dt substantiell zu verstehen. Geht man zur lokalen Betrachtungsweise über, so muß man d/dt durch $\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})$ ersetzen, worin $\mathbf{v}$ die Materiegeschwindigkeit ist, die auf das System bezogen ist, indem man die Ableitungen $\partial/\partial t$ als lokal ansieht. Man hat dann

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T.$$

Setzt man dies in (11) ein und definiert man den adiabatischen Gradienten $\operatorname{grad}_{ad} T$ durch

$$\frac{\delta T}{dt} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}_{ad} T,$$

so erhält man

$$c_p^* \varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon \varrho - \operatorname{div} \mathbf{f} + c_p^* \varrho \mathbf{v} [\operatorname{grad}_{ad} T - \operatorname{grad} T] \quad (12)$$

mit

$$c_p^* = c_v + \left(\frac{4-3\beta}{\beta} + 16 \frac{1-\beta}{\beta^2} \right) (c_p - c_v).$$

Dies ist die Gleichung für die Energiebilanz. Die Funktion c_p^* ist im speziellen gleich c_p , wenn man $\beta = 1$ setzt. c_p^* ist konstant, wenn man das Standardmodell zugrunde legt und c_p, c_v konstant annimmt.

In der Energiebilanz haben wir stillschweigend die Energiedissipation durch Reibung vernachlässigt. Sind $\mathfrak{P}$ der Reibungstensor und $\mathfrak{D}$ der Deformationstensor

$$\mathfrak{P} = \eta \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D} = (D_{ik}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

so ist die pro cm^3 und sec durch Reibung dissipierende Energie $\mathfrak{P} \cdot \cdot \mathfrak{D}$, worin $\cdot \cdot$ das doppelt skalare Produkt $\star$ symbolisiert. Damit folgt, wenn nicht gerade starre Rotation vorliegt,

$$\mathfrak{P} \cdot \cdot \mathfrak{D} \sim \eta \omega^2.$$

Vergleicht man die im Mittel dissipierte Energie $\overline{\eta \omega^2}$ etwa mit $\overline{\varepsilon_{\text{G}}}$, so folgt $\overline{\mathfrak{P} \cdot \cdot \mathfrak{D}} / \overline{\varepsilon_{\text{G}}} \sim \left(\frac{v \omega^2}{\varepsilon} \right)$ und da ω^2 bei den raschesten Sternen etwa $10^{-7} \dots 10^{-8}$ ist, $v \varepsilon$ aber bei den raschesten Sternen etwa bei 10^5 liegt, so folgt, daß $\overline{\mathfrak{P} \cdot \cdot \mathfrak{D}} / \overline{\varepsilon_{\text{G}}}$ sehr viel kleiner ist als 1. Es ist sogar sicher $\overline{\mathfrak{P} \cdot \cdot \mathfrak{D}} / \overline{\varepsilon_{\text{G}}} \leq \chi$ und gleichfalls $\overline{\mathfrak{P} \cdot \cdot \mathfrak{D}} / \text{div} \mathfrak{f} \leq \chi$ und damit erhält man ein konsistentes Modell, wenn man in einer Theorie erster Ordnung die Energiedissipation durch Reibung vernachlässigt.

4. Kugelfunktionsentwicklungen für die Aufbaugleichungen

Die Gln. (2) bis (10) und (12) beschreiben Aufbau und Rotation eines Sterns vollständig, wenn man sich die in den vorigen Abschnitten eingeführten Vereinfachungen erlaubt und wenn man für Energieerzeugung und Opazität entsprechende Ansätze macht:

$$\varepsilon = \varepsilon(\varrho, T), \quad \kappa = \kappa(\varrho, T), \quad (13)$$

in denen ε und κ auch noch von der chemischen Zusammensetzung abhängen. Zur Lösung des vollständigen Gleichungssystems entwickeln wir die Winkelgeschwindigkeit nach gewöhnlichen Kugelfunktionen

$$\omega(r, \vartheta; t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(r, t) P_i. \quad (14)$$

Da das bei einem Stern zu erwartende Rotationsgesetz ω zu jeder Zeit eine stetige Funktion ihrer Argumente ist, so konvergiert die Reihe (14) und die Koeffizienten ω werden mit wachsendem i immer kleiner. Wir wollen aber nicht annehmen, daß die Koeffizienten so rasch klein werden, daß man praktisch schon nach dem zweiten Glied abbrechen kann. Es ist nämlich schon bei mäßiger Rotation nicht von vornherein zu erwarten, daß die Reihe (14) rasch konvergiert. So ist es z. B. denkbar,

$\star$ Sind $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ und $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ zwei Tensoren zweiter Stufe, dann ist das doppelt skalare Produkt der Skalar

$$\mathfrak{A} \cdot \cdot \mathfrak{B} = \sum_{i,k} a_{ik} b_{ik}.$$

daß bei rascher Rotation die Coriolis-Kräfte der meridionalen Zirkulationen an der Oberfläche ein Rotationsgesetz anstreben, welches mit Ausnahme polnaher Bereiche stark dem Gesetz $\omega = \frac{\text{konst}}{\sin^2 \vartheta}$ ähnelt. Die Konvergenz der zugehörigen Kugelfunktionsentwicklung wird dann aber beliebig schlecht. Geht man mit (14) in die hydrostatischen Gleichungen (5), (6), so hat man zu entwickeln:

$$\omega^2 \sin^2 \vartheta = \sum_l \sum_{i,k} (i, k; \sin^2 \vartheta)_l \omega_i \omega_k P_l = \omega^{*-2} \sum_l \sigma_l P_l, \quad (\omega^* = (\omega)_{r=0, t=0}). \quad (15)$$

$$\sigma_l = \omega^{*-2} \sum_{i,k} (i, k; \sin^2 \vartheta)_l \omega_i \omega_k,$$

$$\omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \omega^{*-2} \sum_l \tau_l P_l^1, \quad (16)$$

$$\tau_l = \omega^{*-2} \sum_{i,k} (i, k; \sin \vartheta \cos \vartheta)_l^1 \omega_i \omega_k.$$

Ist $\omega(r, \vartheta; t) = \omega(r, \pi - \vartheta; t)$, so verschwinden in (14) die Glieder mit ungeradem Index und man hat speziell

$$\sigma_0 = \omega^{*-2} \left(\frac{2}{3} \omega_0^2 - \frac{4}{15} \omega_0 \omega_2 + \dots \right),$$

$$\sigma_2 = \omega^{*-2} \left(-\frac{2}{3} \omega_0^2 + \frac{20}{21} \omega_0 \omega_2 + \dots \right);$$

$$\tau_2 = \omega^{*-2} \left(\frac{1}{3} \omega_0^2 - \frac{2}{21} \omega_0 \omega_2 + \dots \right),$$

$$\tau_4 = \omega^{*-2} \left(\frac{6}{35} \omega_0 \omega_2 + \dots \right).$$

Für ϱ und Φ liegen daher Ansätze der Form

$$\varrho = \sum_{l=0}^{\infty} \varrho_l P_l, \quad \Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l P_l$$

nahe. Wir haben dabei von der im Anhang erklärten Symbolik Gebrauch gemacht. Geht man so sämtliche Aufbaugleichungen und die Kontinuitätsgleichung durch, so werden allgemein die folgenden Ansätze nahegelegt:

$$H = \sum_l H_l P_l, \quad F_r = \sum_l F_{rl} P_l, \quad v_r = \sum_l v_{rl} P_l; \quad F_\vartheta = \sum_l F_{\vartheta l} P_l^1, \quad v_\vartheta = \sum_l v_{\vartheta l} P_l^1.$$

Im folgenden wollen wir eine Kontraktion des Modells ausschalten. Dann wird v_{r0} gleich null, denn es muß die gesamte durch eine Kugel vom Radius r um den Mittelpunkt fließende Materiemenge verschwinden:

$$0 = r^2 \int_0^{l\pi} \int_0^\pi v_r \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi r^2 v_{r0}, \quad \text{da} \quad \int_0^\pi P_l \sin \vartheta \, d\vartheta = 0 \quad \text{für} \quad l > 0.$$

Die Größenordnung der Koeffizienten $\varrho_l, \Phi_l, \Pi_l, F_{rl}, F_{\vartheta l}$ läßt sich aus den zugehörigen Gleichungen unmittelbar abschätzen. Es gilt

$$\varrho_l/\varrho_0 \sim \Phi_l/\Phi_0 \sim \Pi_l/\Pi_0 \sim F_{rl}/F_{r0} \sim F_{\vartheta l}/F_{\vartheta 0} \text{ gleich oder kleiner } \chi \quad (l \geq 2). \quad (17)$$

Bezeichnet man mit ϱ_{00}, Φ_{00} usw. die Funktionen des nichtrotierenden Modells — wir wollen sie als die ungestörten Funktionen bezeichnen — so gilt ferner

$$\frac{\varrho_{00} - \varrho_0}{\varrho_0} \sim \frac{\Phi_{00} - \Phi_0}{\Phi_0} \sim \frac{\Pi_{00} - \Pi_0}{\Pi_0} \sim \frac{F_{r00} - F_{r0}}{F_{r0}} \sim \chi. \quad (18)$$

Für ϱ und Φ wollen wir die Abschätzungen hier explizit durchführen; für die übrigen Funktionen folgt alles ganz analog. Aus (15), (16) folgt, daß die hydrostatischen Gleichungen (5), (6) auf die Systeme

$$-\varrho_0 r \sigma_l \omega^{*2} + \varrho_0 \Phi'_l + \varrho_l \Phi'_0 + \Pi'_l = 0, \quad (19)$$

$$-\varrho_0 r^2 \tau_l \omega^{*2} - \varrho_0 \Phi_l - \Pi_l = 0 \quad (20)$$

führen. Eliminiert man aus beiden Gleichungen die Funktion Π_l , so erhält man

$$\varrho_l = \frac{1}{\Phi'_0} [\varrho'_0 \Phi_l + \omega^{*2} (\varrho_0 r^2 \tau_l)' + \omega^{*2} \varrho_0 r \sigma_l]. \quad (21)$$

Die Gravitationsgleichung (8) geht über in

$$\Delta_l \Phi_l = 4\pi G \varrho_l, \left(\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \quad (22)$$

und man erhält die Abschätzung

$$\varrho_l \sim \frac{1}{4\pi G} \frac{\Phi_l}{R^2} \quad (l \geq 0),$$

also

$$\varrho_l/\varrho_0 \sim \Phi_l/\Phi_0.$$

Aus (21) folgt

$$\varrho_l/\varrho_0 \sim \Phi_l/\Phi_0 + \frac{R^2 \omega^{*2}}{\Phi_0} (\tau_l + \sigma_l).$$

Nun ist aber ω^{*2} so gewählt, daß $\tau_l \sim \sigma_l$ gleich oder kleiner 1, also

$$\varrho_l/\varrho_0 \sim \Phi_l/\Phi_0 \text{ gleich oder kleiner } \frac{\omega^{*2} R^2}{\Phi_0} \sim \frac{\omega^{*2}}{4\pi G \varrho_0} \sim \chi.$$

Damit ist die Behauptung (17) für ϱ und Φ bewiesen. Für (18) setze man

$$\varrho_0 = \varrho_{00} + \varrho_{0'}, \quad \Phi_0 = \Phi_{00} + \Phi_{0'}.$$

Dann folgt anstelle von (19), (20)

$$-\varrho_{00} r \sigma_0 \omega^{*2} + \varrho_{00} \Phi'_{0'} + \varrho_{0'} \Phi'_0 + \Pi'_{0'} = 0,$$

$$-\varrho_{00} r^2 \tau_0 \omega^{*2} - \varrho_{00} \Phi_{0'} - \Pi_{0'} = 0$$

und der eben benutzte Eliminationsprozeß führt auf $\varrho_{0'}/\varrho_{00} \sim \Phi_{0'}/\Phi_{00} \sim \chi$.

Wenn die Koeffizienten $\omega_0, \omega_2, \dots, \omega_l$ der Entwicklung alle von gleicher Größenordnung sind $\frac{\omega_2}{\omega_0} \sim \frac{\omega_4}{\omega_0} \sim \dots \sim \frac{\omega_{l_0}}{\omega_0} \sim 1$, dann gilt im allgemeinen für die Koeffizienten der Entwicklung von ϱ $\frac{\varrho_2}{\varrho_0} \sim \frac{\varrho_4}{\varrho_0} \sim \dots \sim \frac{\varrho_{2(l_0-1)}}{\varrho_0} \sim \chi$. Aus den Abschätzungen (17), (18) folgt, daß es in der Theorie erster Ordnung gestattet ist, Produkte der Form $\varrho_l \varrho_0, T_l T_0$ ($l > 0$) und ähnliche gegenüber der 1 gleich null zu setzen. Ferner darf man z. B. $\varrho_0 T_l$ und $\varrho_{00} T_l$ ($l > 0$) als identisch ansehen. Dagegen ist es im allgemeinen nicht erlaubt, Ausdrücke der Form $v_i \omega_k$ oder $\omega_i \omega_k$ ohne weiteres wegzulassen. (Auch unsere in der Einleitung formulierte Forderung, die Koeffizienten der q -Komponente der Bewegungsgleichung aus dem nichtrotierenden Modell zu übernehmen, ist keine Folgerung der Theorie erster Ordnung: sie besagt nämlich, daß wir z. B. $\varrho_0 \omega_i$ und $\varrho_{00} \omega_i$ als identisch ansehen dürfen.) Die hier formulierte Theorie erster Ordnung führt daher zwar auf lineare Gleichungen für die Störungsfunktionen ϱ_l, Φ_l usw., sie führt aber in ihrer allgemeinen Form auf nichtlineare Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten ω_i der Winkelgeschwindigkeit.

Die linearen Gleichungssysteme für die Störungen der Aufbaugrößen erhält man unmittelbar durch Reihenentwicklung. Die Gasgleichung zerfällt für $\mu = \text{konst.}$ in (vgl. Anhang)

$$\begin{aligned} \Pi_l = \frac{\Re}{\mu} (\varrho T)_l + \frac{a}{3} (T^4)_l = \frac{\Re}{\mu} \sum_{i,k} (i, k)_l \varrho_i T_k + \\ + \frac{a}{3} \sum_{i,k,m,n} (i, k, m, n)_l T_i T_k T_m T_n \end{aligned}$$

und da alle Glieder vernachlässigt werden, die in χ von höherer Ordnung sind, erhält man

$$\Pi_l = \frac{\Re}{\mu} (\varrho_0 T_l + \varrho_l T_0) + \frac{4a}{3} T_0^3 T_l. \quad (23)$$

Denken wir uns die Gleichungen (13) für Energieerzeugung und Opazität entsprechend entwickelt

$$\varepsilon = \sum_l \varepsilon_l P_l, \quad \kappa = \sum_l \kappa_l P_l, \quad (24)$$

so wird aus der Gleichung (10) für den Strahlungsstrom

$$F_{rl} = -\frac{4ac}{3} \frac{T_0^3 T_0'}{\kappa_0 \varrho_0} \left(3 \frac{T_l}{T_0} \frac{\kappa_l}{\kappa_0} \frac{\varrho_l}{\varrho_0} + \frac{T_l'}{T_0'} \right), \quad (25)$$

$$F_{\vartheta l} = -\frac{4ac}{3} \frac{T_0^3}{r \kappa_0 \varrho_0} T_l \quad (26)$$

und aus der Energiebilanz (12) wegen

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{f})_l &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_{rl}) + \frac{1}{r} l(l+1) F_{\vartheta l} \\ \varepsilon_l \varrho_l + \varepsilon_0 \varrho_l &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_{rl}) + \frac{1}{r} l(l+1) F_{\vartheta l} \\ &= c_p^* (\varrho_l \dot{T}_l + \varrho_l \dot{T}_0) + c_p^* \varrho_0 v_{rl} \left[\frac{\partial T_0}{\partial r} - \left(\frac{\partial T_0}{\partial r} \right)_{ad} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Wir haben dabei der Einfachheit halber c_p^* als konstant angenommen; es ist leicht einzusehen, wie Gleichung (27) aussieht, wenn c_p^* eine Entwicklung nach den P_l besitzt.

5. Die Bewegungsgleichung in Gegenwart meridionaler Strömungen

Setzt man in die Bewegungsgleichung (7) die Entwicklungen aus Abschnitt 4 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} v_r &= \sum_l \sum_{i,k} \frac{v_{ri}}{r^2} \frac{\partial r^2 \omega_k}{\partial r} (\bar{i}, k)_l P_l, \\ \frac{1}{r \sin^3 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta} v_\vartheta &= \sum_l \sum_{i,k} \frac{v_{\vartheta i}}{r} \omega_k (\bar{i}; 2 \cotg \vartheta P_k - P_k^1)_l P_l, \\ \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\eta_l \sin^3 \vartheta \frac{\partial \omega_l}{\partial \vartheta} \right) &= - \frac{\eta_l}{r^2} \sum_i [l(l+1) \omega_l + \sum_i (\bar{i}; 2 \cotg \vartheta)_l \omega_i] P_l. \end{aligned}$$

Damit zerfällt (7) in unendlichviele Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_0 \omega_l) + \varrho_0 \sum_{i,k} \frac{v_{ri}}{r^2} \frac{\partial r^2 \omega_k}{\partial r} (\bar{i}, k)_l + \varrho_0 \sum_{i,k} \frac{v_{\vartheta i}}{r} \omega_k (\bar{i}; 2 \cotg \vartheta P_k - P_k^1)_l + \\ + \frac{1}{c^2 r^4} \frac{\partial (r^4 F_{r0} \omega_l)}{\partial r} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \eta_0 \frac{\partial \omega_l}{\partial l} \right) + \\ + \frac{\eta_0}{r^2} [l(l+1) \omega_l + \sum_i (\bar{i}; 2 \cotg \vartheta)_l \omega_i] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Dieses System wird gleichwertig mit der Bewegungsgleichung der Theorie nullter Ordnung [I, Gl. (2)], wenn man $v_r = 0$, $v_\vartheta = 0$ setzt. Wenn das Sternmodell festliegt (d. h. wenn ϱ_0 , F_{r0} und η_0 als Funktionen von r und t gegeben sind) und wenn man die v_{rl} und $v_{\vartheta l}$ als Funktionen von r und t vorgibt, so wird durch die Randbedingungen

$$(\omega_0)_{r=0} \text{ endlich, } (\omega_l)_{r=0} = 0 (l > 0); \left(\eta_0 \frac{\partial \omega_l}{\partial r} \right)_{r=R} = 0$$

(wobei die letzte Bedingung besagt, daß die Reibung keinen Drehimpuls durch die Oberfläche hindurchtransportieren kann) und die Anfangsbedingung $(\omega_l)_{t=0} = W(r, \vartheta)$ bzw.

$$(\omega_l)_{t=0} = W_l(r), \quad (W(r, \vartheta) = \sum W_l P_l)$$

eine Lösung des Systems (28) eindeutig bestimmt. Diese Lösung stellt gleichzeitig die durch die folgende Anfangswertaufgabe eindeutig festgelegte Funktion dar: Zur Zeit $t = 0$ rotiere das Sternmodell nach dem Gesetz $\omega = W(r, \theta)$. Es soll das Rotationsgesetz für alle späteren Zeitpunkte bestimmt werden.

Die Kontinuitätsgleichung (2) haben wir in vereinfachter Form betrachtet, was gestattet ist, wenn man Kontraktion ausschaltet, also annimmt, daß $v_{r0} = 0$ ist. Dann setzt sich $\partial \varrho / \partial t$ zusammen aus einem Anteil $-\varepsilon \varrho c^2$, der von der in Energie umgewandelten Materie herrührt und einem Anteil, der daher kommt, daß der Stern Drehimpuls verliert, dabei langsamer wird und nicht nur seine Abplattung, sondern auch seinen mittleren Radius etwas ändert. Die zu diesen säkularen Änderungen gehörenden meridionalen Geschwindigkeiten sind vernachlässigbar klein und man kann die Kontinuitätsgleichung einfach in der Form

$$\operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\varepsilon \varrho}{c^2} \right)$$

ansetzen*. Man befriedigt sie am besten durch Einführen einer Stromfunktion S :

$$S = \sum_l S_l P_l^1 \sin \theta, \quad (29)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \theta} = \varrho r^2 v_r, \quad v_{rl} = \frac{1}{r^2 \varrho} l(l+1) S_l. \quad (30)$$

Setzt man dann

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial r} = -\varrho r v_\theta, \quad v_{\theta l} = -\frac{1}{r \varrho} \frac{d S_l}{d r}, \quad (31)$$

dann genügen v_r, v_θ der Kontinuitätsgleichung. Die Funktion S stellt gleichzeitig die Stromfunktion dar, d. h. die Linien $S = \text{konst.}$ sind die Stromlinien der meridionalen Strömungen. Zum Beweis kann man leicht zeigen, daß das skalare Produkt der Vektoren $\operatorname{grad} S$ und $\mathbf{v}_m = (v_r, v_\theta)$ identisch verschwindet:

$$(\operatorname{grad} S \cdot \mathbf{v}_m) = \frac{1}{r^2 \varrho_0} \sum_{i,k} \frac{d S_i}{d r} S_k \left(k(k+1) P_k P_i^1 \sin \theta - P_i^1 \frac{\partial \sin \theta P_k^1}{\partial \theta} \right) \equiv 0.$$

Die Tangentenvektoren an die Kurven $S = \text{konst.}$ haben bis auf das Vorzeichen die gleiche Richtung wie $\mathbf{v}_m$.

Die Komponenten v_r, v_θ der meridionalen Strömungen müssen durch Lösung der durch die Fliehkraft gestörten Aufbaugleichungen bestimmt werden.

* In I haben wir allgemeiner $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \alpha_1 \varrho$ gesetzt und über α_1 nicht weiter verfügt. Da auch in I Kontraktion ausgeschaltet ist, so muß dort $\alpha_1 = -\frac{\varepsilon}{c^2}$ gesetzt werden. Dadurch vereinfachen sich dort einige Ausdrücke.

Denkt man sich irgendein System

$$v_r = \sum_i v_{ri}(r, t) P_i, \quad v_\vartheta = \sum_k v_{\vartheta k}(r, t) P_k^1$$

meridionaler Strömungen vorgegeben, dessen Geschwindigkeiten hinreichend langsam sind, so daß die Lösung von (28) noch nahe bei der Lösung der Theorie nullter Ordnung liegt, so kann man (28) relativ einfach lösen. Es sei ω_{00} eine Lösung der Theorie nullter Ordnung, so kann man

$$\omega(r, \vartheta; t) = \omega_{00}(r, t) + \overset{s}{\omega}(r, \vartheta; t), \quad \overset{s}{\omega} = \sum_i \overset{s}{\omega}_i(r, t) P_i$$

setzen. Geht man damit in (28) und vernachlässigt Glieder der Form $\overset{s}{\omega}_i r_{,k}$ usw., so erhält man für die $\overset{s}{\omega}_i$ inhomogene partielle Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_0 \overset{s}{\omega}_i) + \frac{1}{c^2 r^4} \frac{\partial (r^4 F_{r0} \overset{s}{\omega}_i)}{\partial r} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \eta_0 \frac{\partial \overset{s}{\omega}_i}{\partial r} \right) - \\ + \frac{\eta_0}{r^2} \left[l(l+1) \overset{s}{\omega}_i + \sum_i (\bar{i}; 2 \cotg \vartheta)_i \overset{s}{\omega}_i \right] = J_i, \end{aligned}$$

worin die Inhomogenitätsglieder J_i nur noch von v_{ri} , $v_{\vartheta k}$, ω_{00} , $\frac{\partial \omega_{00}}{\partial r}$ abhängen.

Als Randbedingungen hat man

$$\left(\overset{s}{\omega}_0 \right)_{r=0} \text{ endlich, } \left(\overset{s}{\omega}_i \right)_{r=0} = 0 (i > 0); \quad \left(\eta_0 \frac{\partial \overset{s}{\omega}_i}{\partial r} \right)_{r=R} \text{ endlich.}$$

Und damit sind die Lösungen $\overset{s}{\omega}_i$ gerade eindeutig festgelegt. Besonders einfach wird die Lösung, wenn die J_i sich in der Form

$$J_i = \sum_n J_{in} e^{-m_n t}$$

aufspalten lassen, worin die J_{in} nicht mehr von der Zeit abhängen. Dann lassen sich die $\overset{s}{\omega}_i$ entsprechend aufspalten

$$\overset{s}{\omega}_i = \sum_n \overset{s}{\omega}_{in} e^{-m_n t}$$

und man erhält für die $\overset{s}{\omega}_{in}$ ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

6. Die Berechnung der meridionalen Strömung

Eliminiert man aus der Poissonschen Gleichung (22) ϱ_l mit Hilfe von (21), so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta_l \Phi_l - \frac{4\pi G \varrho'_0}{\Phi'_0} \Phi_l \\ - \frac{4\pi G}{\Phi'_0} \omega^{*2} [(\varrho_0 r^2 \tau_l)' + \varrho_0 r \sigma_l], \quad \left(\Delta_l - \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right). \quad (32) \end{aligned}$$

Ist also das Rotationsgesetz $\omega(r, \vartheta; t) = \sum_l \omega_l P_l$ eines Sterns bekannt, so lassen sich die Größen σ_l , τ_l gemäß (15), (16) bestimmen, und (32) stellt dann die Gleichung für das Gravitationspotential des durch die Rotation deformierten Sterns dar. Dabei gilt (32) nur im Sterninnern während im Außenraum

$$\Delta_l \Phi_l = 0 \quad (33)$$

gilt. An der Grenzfläche müssen die Lösungen von (32) und (33) stetig und mit stetiger Ableitung ineinander übergehen. Dabei ist es in der Theorie erster Ordnung gestattet, für die gestörten Funktionen als Grenzfläche die Kugel $r = R$ anzunehmen. Da im Außenraum die Funktionen Φ_l regulär bleiben müssen, erhält man für $r > R$

$$\Phi_l = \frac{\text{konst.}}{r^{l+1}}$$

und als Randbedingungen für die Lösung der Gleichungen (32)

$$(\Phi_l)_{r=0} = 0, \quad R(\Phi_l')_{r=R} + (l+1)(\Phi_l)_{r=R} = 0, \quad (l > 0). \quad (34)$$

Damit ist nun genau eine Lösung des Systems (32) festgelegt. Aus (21) und der Zustandsgleichung (23) folgt

$$T_l = -\frac{\beta}{4-3\beta} \frac{\mu}{\Re} \left(\frac{\Re}{\mu} T_0 \frac{\varrho_l}{\varrho_0} + r^2 \tau_l \omega^{*2} + \Phi_l \right). \quad (35)$$

Die praktische Berechnung der meridionalen Strömungen zu einem vorgegebenen Rotationsgesetz ω geht jetzt bei einem allgemeinen im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Modell so vor sich, daß man zuerst die σ_l, τ_l gemäß (15), (16) berechnet und dann die Gl (32) mit den Randbedingungen (34) löst. Dann berechnet man die T_l aus (35) und bestimmt die Entwicklungen für r und z . Dann lassen sich die Funktionen $F_{r,l}$ und $F_{\theta,l}$ nach (25), (26) berechnen und mit ihnen liefert die Energiebilanz (27) die Funktion r_{*l} , aus der man über (30) die Stromfunktion der meridionalen Strömungen erhält.

Die Verhältnisse werden sehr übersichtlich, wenn man das Standardmodell mit $r = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$ zugrunde legt. Dann hat man (vgl. I)

$$\varrho_{00} = Q^* u^3, \quad T_{00} = T^* u, \quad F_{r00} = F^* \frac{du}{dz}, \quad \eta_{00} = c_1 u^{5/2} + c_2 u, \quad \Phi_{00} = \Phi^* u; \\ z = r^{*-1} r, \quad R r^{*-1} = z^* = 6,9011,$$

worin u die Emdenfunktion vom Index 3 ist. Setzt man ferner

$$\delta = -\frac{r^* F^*}{c^2 \eta^*}, \quad \eta^* = c_1 + c_2, \quad \tilde{\eta}_{00} = \frac{1}{\eta^*} \eta_{00}, \quad \tilde{v}_{00} = \frac{\tilde{\eta}_{00}}{u^3},$$

dann bestehen wie in I die Relationen

$$\Phi^* = -4\pi G Q^* r^{*2}, \quad \frac{4\pi c T^{*4}}{3 \varepsilon \kappa r^{*2}} = Q^{*2}, \quad \frac{a \mu T^{*3}}{3 \Re Q^*} \\ = \frac{1-\beta}{\beta}, \quad T^* = -\frac{1}{4} \beta \frac{\mu}{\Re} \Phi^*, \\ F^* = -r Q^* r^*, \quad c_1 = c_0 T^{*5/2}, \quad c_2 = \frac{2}{15} \frac{a T^{*4}}{c \kappa Q^*}, \quad \delta = 10 \frac{c_2}{c_1 + c_2},$$

und wie wir bereits in Abschnitt 4 sahen, kann man in den Gleichungen für die gestörten Funktionen für ϱ_0, T_0, F_{r0} usw. einfach $\varrho_{00}, T_{00}, F_{r00}$ setzen. Wir definieren als weitere dimensionslose Funktionen $\tilde{\Phi}_l, \tilde{T}_l,$

$\tilde{F}_{rl}, \tilde{v}_{rl}, \tilde{F}_{\vartheta l}, \tilde{v}_{\vartheta l}$ gemäß

$$\varrho_l = \chi^* \varrho^* \tilde{\varrho}_l, \Phi_l = \chi^* \Phi^* \tilde{\Phi}_l, T_l = \chi^* T^* \tilde{T}_l, F_{rl} = \chi^* F^* \tilde{F}_{rl},$$

$$F_{\vartheta l} = \chi^* F^* \tilde{F}_{\vartheta l}, v_{rl} = \chi^* v^* \tilde{v}_{rl}, v_{\vartheta l} = \chi^* v^* \tilde{v}_{\vartheta l}$$

$$\text{mit } \chi^* = \frac{\omega^{*2}}{2\pi G \varrho^*}, v^* = \frac{F^*}{c_p^* \varrho^* T^* (3-4\gamma)}, \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Damit wird aus (21) jetzt einfach

$$\tilde{\varrho}_l = 3 u^2 \Phi_l - \frac{1}{2u'} (z^2 u^3 \tau_l)' - \frac{1}{2} \frac{u^3}{u'} z \sigma_l. \quad (36)$$

Die Gl. (35) geht über in

$$\tilde{T}_l = \tilde{\Phi}_l - \frac{1}{2} z^2 \tau_l + \frac{1}{2} \frac{\beta}{4-3\beta} \frac{u}{u'} [(z^2 \tau_l)' + z \sigma_l]. \quad (37)$$

Aus (25), (26) erhält man

$$\tilde{F}_{rl} = \frac{2}{4-3\beta} [(z^2 \tau_l)' + z \sigma_l] + \tilde{T}_l', \quad (38)$$

$$\tilde{F}_{\vartheta l} = -\frac{1}{z} \tilde{T}_l. \quad (39)$$

Damit wird

$$\chi^* F^* (\operatorname{div} \hat{\mathbf{f}})_l = \frac{1}{4} \tilde{T}_l' + \frac{2}{3\beta} \frac{1}{z^2} [z^2 (z^2 \tau_l)' + z^3 \sigma_l]'$$

Andrerseits ist

$$\Delta_l \tilde{T}_l = \Delta_l \tilde{\Phi}_l - \frac{1}{2} \Delta_l (z^2 \tau_l) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{4-3\beta} \Delta_l \left\{ \frac{u}{u'} [(z^2 \tau_l)' + z \sigma_l] \right\}$$

und wegen

$$\Delta_l \tilde{\Phi}_l = -\tilde{\varrho}_l$$

erhält man

$$-\varepsilon \varrho_l = (\operatorname{div} \hat{\mathbf{f}})_l = \frac{\chi^* F^*}{r^*} \left\{ -\frac{1}{2} \Delta_l (z^2 \tau_l) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{4-3\beta} \Delta_l \left\{ \frac{u}{u'} [(z^2 \tau_l)' + z \sigma_l] \right\} + \frac{2}{4-3\beta} \frac{1}{z^2} [z^2 (z^2 \tau_l)' + z^3 \sigma_l]' \right\}.$$

Damit liefert die Energiebilanz (27) wegen $\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{ad} = (\gamma-1) \frac{T}{\varrho} \frac{d\varrho}{dr}$

$$u' u^3 \tilde{v}_{rl} = -\frac{1}{2} \Delta_l (z^2 \tau_l) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{4-3\beta} \Delta_l \left\{ \frac{u}{u'} [(z^2 \tau_l)' + z \sigma_l] \right\} + \frac{2}{z^2 (4-3\beta)} [z^2 (z^2 \tau_l)' + z^3 \sigma_l]' \quad (40)$$

und für die Entwicklungskoeffizienten der Stromfunktion erhält man

$$\tilde{S}_l = \frac{z^2}{l(l+1)u'} \left\{ -\frac{1}{2} \Delta_l (z^2 \tau_l) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{4-3\beta} \Delta_l \left[\frac{u}{u'} ((z^2 \tau_l)' + z \sigma_l) \right] + \frac{2}{z^2 (4-3\beta)} [z^2 (z^2 \tau_l)' + z^3 \sigma_l]' \right\}, \quad S_l = \chi^* \varrho^* v^{*2} \tilde{S}_l. \quad (41)$$

Damit kann man also die Stromfunktion der meridionalen Strömungen unmittelbar angeben, wenn man das Rotationsgesetz ω kennt. Da in dem Ausdruck für S die Störungsfunktionen Φ_l , q_l , T_l usw. nicht mehr auftreten, so braucht man das System (32) für die Φ_l gar nicht zu lösen. Dies ist ein Vorteil, der von einer speziellen Eigenschaft des Standardmodells herrührt. Wenn man ein allgemeines Modell für das Strahlungsgleichgewicht zugrunde legt, dann erhält der Ausdruck für v_{rl} (und damit auch der für S_l) noch die Störungsfunktionen Φ_l , q_l , T_l , ε_l , z_l , F_{rl} , $F_{\theta l}$, die wiederum sämtlich in einem einfachen Zusammenhang mit Φ_l stehen. Man muß dann erst die Φ_l aus (32) bestimmen und kann dann die übrigen Störfunktionen berechnen um mit ihrer Hilfe aus der Energiebilanz (27) die v_{rl} und damit die S_l bestimmen.

7. Ergänzungen

Da in mittleren Bereichen des Sterns, d. h. nicht zu nahe an Mittelpunkt und Oberfläche $\tilde{r}_{rl} \sim 1$ ($l > 0$) ist, so folgt, daß $v^* \chi^*$ die Größenordnung der meridionalen Strömungen der Theorie erster Ordnung angibt. Mit den Relationen

$$F^* \sim \frac{L}{4\pi R^{*2}}, \quad q^* \sim \frac{3M}{4\pi r^{*3}}, \quad T^* \sim \frac{\mu}{\mathfrak{R}} \Phi^* \sim \frac{1}{c_p^*} \Phi^* \sim \frac{4\pi G}{c_p^*} q^* r^{*2}, \\ r^* \sim R^*, \quad 3 - 4\gamma \sim 1$$

erhält man

$$v^* = \frac{F^*}{c_p^* q^* T^* (3 - 4\gamma)} \sim \frac{L R^2}{G M^2} \quad (42)$$

in Übereinstimmung mit SWEET (1950). Darüber hinaus kann man leicht zeigen: wenn $\omega_2/\omega_0 \sim \dots \sim \omega_{l_0}/\omega_0 \sim 1$, dann ist $v_{r_2} \sim \dots \sim v_{r_2(l_0+1)} \sim \chi^* v^*$ und entsprechendes gilt für die $v_{\theta l}$.

Die Abschätzung (42) gestattet es, in jedem Beispiel nachträglich zu zeigen, daß es erlaubt war, die Beschleunigungskräfte gegenüber der Fliehkraft zu vernachlässigen. Die Rotation bewirkt eine Neigung der Flächen $q = \text{konst.}$, $\Pi = \text{konst.}$ gegeneinander; daraus folgen Kraftwirkungen auf die Sternmaterie in meridionaler Richtung. Diese Kraftwirkungen werden durch die Zentrifugalkräfte gerade kompensiert. Man sieht das unmittelbar, wenn man die q -Komponente des Differentialoperators rot der allgemeinen Bewegungsgleichung (1) bildet, wobei man zweckmäßigerweise vorher durch q dividiert und Reibungskräfte sowie den Impulstransport durch den Strahlungsstrom vernachlässigt. Es wird dann

$$\text{rot}_\varphi \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{rot}_\varphi [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] + \text{rot}_\varphi \left(\frac{1}{q} \text{grad } \Pi \right) = 0$$

und wenn man darin die Glieder wegläßt, die in den Komponenten der meridionalen Geschwindigkeit $v_m = \mathbf{v} - v_\varphi$ von höherer als erster

Ordnung sind,

$$\operatorname{rot}_{\varphi} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \right) - \operatorname{rot}_{\varphi} [\mathbf{v}_{\varphi} \operatorname{rot} \mathbf{v}_{\varphi}] + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} \Pi \right]_{\varphi} = 0. \quad (43)$$

Nun ist

$$\operatorname{rot}_{\varphi} [\mathbf{v}_{\varphi} \operatorname{rot} \mathbf{v}_{\varphi}] = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r} \frac{\partial r^2 \omega^2}{\partial r} - \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega^2}{\partial \vartheta} \\ - \sum_l \frac{1}{l} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \sum_{i,k} (i, k; \sin \vartheta \cos \vartheta)_l^1 r^2 \omega_i \omega_k P_k^1 - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sum_{i,k} (i, k; \sin^2 \vartheta)_l r \omega_i \omega_k P_l^1 \right\}.$$

Damit folgt wegen (15), (16)

$$(\operatorname{rot}_{\varphi} [\mathbf{v}_{\varphi} \operatorname{rot} \mathbf{v}_{\varphi}])_l^1 = \frac{\omega^{*2}}{r} \{ r \sigma_l + (r^2 \tau_l)' \}.$$

Andrerseits ist $\left[\operatorname{grad} \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} \Pi \right]$ ein Maß für die gegenseitige Neigung der Flächen $\varrho = \text{konst.}$, $\Pi = \text{konst.}$ und es gibt eine Entwicklung

$$\left[\operatorname{grad} \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} \Pi \right] = \sum_l \left(\left[\operatorname{grad} \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} \Pi \right]_l \right) P_l^1, \\ \left(\left[\operatorname{grad} \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} \Pi \right]_{\varphi} \right)_l^1 = \frac{1}{r \varrho_0^2} (\varrho'_0 \Pi_l - \varrho_l \Pi'_0).$$

Damit erhält man aus (43)

$$\left(\operatorname{rot}_{\varphi} \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \right)_l^1 - \frac{\omega^{*2}}{r} \{ r \sigma_l + (r^2 \tau_l)' \} + \frac{1}{r \varrho_0^2} (\varrho'_0 \Pi_l - \varrho_l \Pi'_0) = 0. \quad (44)$$

Das erste Glied der linken Seite rührt von der Beschleunigung in meridionaler Richtung her, das zweite Glied von der Zentrifugalkraft, das dritte von den Neigungen der Flächen $\varrho = \text{konst.}$, $\Pi = \text{konst.}$ gegeneinander. Alle im folgenden berechneten meridionalen Strömungen setzen voraus, daß sich der zweite und dritte Term von (44) praktisch kompensieren. Es läßt sich leicht nachträglich prüfen, daß dies mit Ausnahme von überflächennahen Bereichen der Fall ist.

Läßt man in (44) das Beschleunigungsglied weg, so erhält man die Form des Bjerknessschen Theorems (vgl. etwa ROSSELAND, 1931), allerdings in sphärischen Koordinaten. Es ist nämlich dann (44) gleichwertig mit

$$2 r \sin \vartheta \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} = \left\| \operatorname{grad} \frac{1}{\varrho}, \operatorname{grad} \Pi \right\|.$$

Natürlich sind Zylinder-Koordinaten dem Bjerknessschen Theorem viel angemessener als sphärische.

Man kann nun sehr leicht die Verhältnisse bei starrer Rotation übersehen. Mit $\omega = \text{konst.}$ hat man $\sigma_2 = -\frac{2}{3} \omega^2$, $\tau_2 = \frac{1}{3} \omega^2$. Für die meridionalen Zirkulationen erhält man daher aus (40) $\tilde{v}_{r2} = 0$ und trivialerweise $\tilde{v}_{rl} = 0$ ($l > 2$). Daraus folgt für die starre Rotation des Standardmodells, daß in der Theorie erster Ordnung keine meridionalen Strömungen auftreten. Dieses Ergebnis hat zuerst SCHWARZSCHILD (1942)

gefunden. Es ist an zwei Voraussetzungen geknüpft. Ihm liegt das Standardmodell zugrunde und das Modell ist zeitlich konstant. Daß bei der starren Rotation anderer Sternmodelle auch in der Theorie erster Ordnung meridionale Strömungen auftreten, zeigt SWEETS Untersuchung des starr rotierenden Cowling-Modells (1950) und eine Arbeit von ÖRIK über die Rotation eines anderen Modells (1950). Daß in einem starr rotierenden Standardmodell meridionale Strömungen auftreten können, wenn die Zustandsgrößen zeitlich veränderlich sind, beruht darauf, daß in diesem Fall das Glied $c_p^* \varrho \dot{T}$ nicht verschwindet. Man erhält dann an Stelle von (40)

$$c_p^* \varrho_0 \dot{T}_l + c_p^* \varrho_l \dot{T}_0 = -c_p^* v_{rl} \varrho_0 \left[\frac{dT_0}{dr} - (\gamma - 1) \frac{T_0}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dr} \right].$$

Denkt man sich jetzt eine zeitliche Änderung des Modells so langsam, daß die zeitlichen Ableitungen der Zustandsgrößen wie Glieder erster Ordnung behandelt werden können, also z. B. das Produkt $\varrho_l \dot{T}_0$ vernachlässigt werden darf, dann wird beim Standardmodell

$$v_{rl} = - \frac{1}{(4-3\gamma)u'} \frac{r^*}{T^*} (\dot{T})_l, \quad (l \geq 2).$$

Denkt man sich z. B. den rotierenden Stern mit der Periode P radial pulsierend, so daß

$$T_0 = T^* \left(u + \alpha_0 \cos \frac{t}{P} \right),$$

so folgt unmittelbar aus den gestörten Aufbaugleichungen, daß dann T_l in der Form

$$T_l = \chi^* T^* \left(\tilde{T}_l + \alpha_l \cos \frac{t}{P} \right), \quad \alpha_l = \alpha_l(r)$$

geschrieben werden kann. Dann wird $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_l = \chi^* \frac{T^*}{P} \alpha_l \sin \frac{t}{P}$ und damit

$$v_{rl} = - \frac{1}{(4-3\gamma)u'} \frac{r^*}{P} \alpha_l \chi^* \sin \frac{t}{P}.$$

Nehmen wir an, daß $\alpha_l \sim \alpha \sim \frac{\Delta T}{T} \sim \frac{\Delta R}{R}$ (ΔT , ΔR mittlere Amplituden von T und R), so wird

$$\frac{v_r}{r^* P} \sim \frac{\Delta T}{T} \chi^* \sin \frac{t}{P} \sim \frac{\Delta R}{R} \chi^* \sin \frac{t}{P}$$

oder

$$v_r \sim \chi^* v_p \sin t/P,$$

worin v_p die Pulsationsgeschwindigkeit an der Oberfläche ist. Die meridionalen Geschwindigkeiten sind also etwa um den Faktor χ^* kleiner als die Pulsationsgeschwindigkeit und sie ändern ihr Vorzeichen im Rhythmus der Periode.

8. Beispiele für meridionale Strömungen

a) Wir betrachten jetzt das Standardmodell, das nach dem in I abgeleiteten ausgezeichneten Rotationsgesetz der Theorie nullter Ordnung

rotieren möge. Es sei also jetzt

$$\omega = \omega_0 = \omega^* w_0(z) e^{-\lambda t}, \quad (w_0(0) = 1),$$

wobei $w_0(z)$ und λ niedrigste Eigenfunktion und niedrigster Eigenwert der in I behandelten selbstadjungierten Eigenwertprobleme darstellen. Hierzu liefert die Theorie erster Ordnung gemäß (40) meridionale Strömungen. Es wird wegen $\omega_l = 0$ ($l > 0$)

$$\sigma_2 = -\frac{2}{3} w_0^2 e^{-2\lambda t}, \tau_2 = \frac{1}{3} w_0^2 e^{-2\lambda t}, \sigma_l = \tau_l = 0 \quad (l > 2) \quad (\text{vgl. (15), (16)})$$

und damit

$$S_2 = \rho^* r^{*2} \chi^* \left\{ -\frac{1}{2} A_2(z^2 w_0^2) + \frac{\beta}{3\rho} A_2\left(\frac{u}{u'} z^2 w_0 w_0'\right) + \frac{4}{z^2(4-3\beta)} (z^4 w_0 w_0')' \right\} e^{-2\lambda t}, \quad S_l = 0 \quad (l > 2). \quad (45)$$

Für die zugehörige Stromfunktion erhält man

$$S = S_2 P_2^1 \sin \vartheta.$$

In Abb. 1 sind die Stromlinien der meridionalen Zirkulationen dieses Falles dargestellt. Man erkennt zwei Strömungssysteme. Im Bereich $0 < z < 4.7$ steigt die Sternmaterie am Äquator auf und sinkt am Pol ab. Im Bereich $4.7 < z < z^{*4}$ steigt sie am Pol auf und sinkt am Äquator ab. Im Bereich $6 < z < z^*$ sind die Stromlinien nicht mehr eingezeichnet. Gleichung (45) liefert nämlich für $z = z^*$ eine Singularität des Geschwindigkeitsfeldes während S_2 selbst dort endlich bleibt. Die Linien $S = \text{konst.}$ überschreiten also die Sternoberfläche und v_r und v_ϑ werden dort unendlich. MESTEL (1953) hat in einer Diskussion der Sweet'schen Arbeit (1950) zuerst auf die Ursache dieser Singularität hingewiesen. Sie beruht darauf, daß die meridionalen Komponenten der Bewegungsgleichung in (5), (6) durch hydrostatische Gleichungen ersetzt wurden. In Wirklichkeit werden in den Oberflächenbereichen die hierbei vernachlässigten

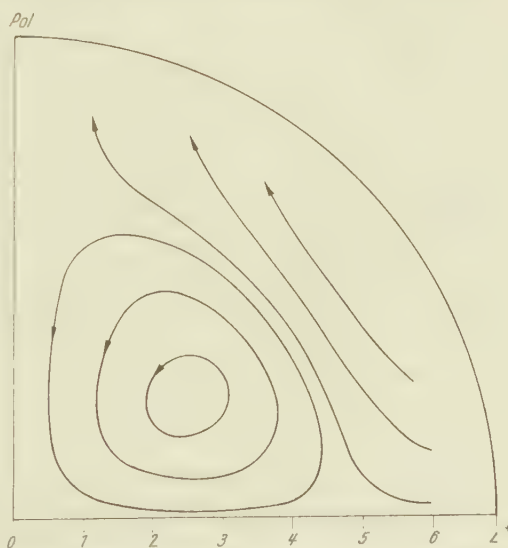
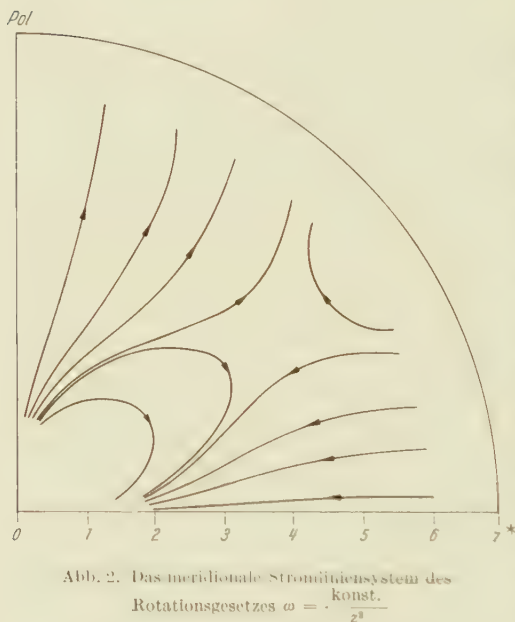


Abb. 1. Das meridionale Stromliniensystem des ausgezeichneten Rotationsgesetzes der Theorie nullter Ordnung

Glieder bedeutungsvoll. Wenn das Sternmodell keine Wasserstoffkonvektionszone besitzt, dann werden vor allem die meridionalen Komponenten des vom Impulstransport durch den Strahlungsstrom herrührenden Gliedes $\text{Div } \mathfrak{T}$ in (1) wichtig. Wenn der Stern eine Wasserstoffkonvektionszone besitzt, dann gelten die oben hergeleiteten Zirkulationen nur für den im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Bereich. In der Wasserstoffkonvektionszone fließen dann gleichfalls meridionale Strömungen, da sich dort wie BIERMANN (1956) zeigte die im Bjerknesschen Theorem auftretenden Glieder $2r \sin \theta \omega \frac{\partial \omega}{\partial z}$ und

$\left[\text{grad } \frac{1}{\rho} \text{ grad } \Pi \right]$ nicht kompensieren können. Diese Strömungen sind singularitätenfrei, wenn man die turbulente Zähigkeit dieser Bereiche in Rechnung zieht. In der Nähe der Oberfläche ist unser Verfahren daher unstatthaft. Man muß sich die im Bereich $4.7 < z < 6$ liegenden Stromlinien nach außen hin so fortgesetzt denken, daß sie sich unter der Oberfläche $z = z^*$ schließen. Die Strömung wird daher in der Nähe der Sternoberfläche vom Pol zum Äquator gerichtet sein. Bei $z = 0$ hat S eine dreifache Nullstelle. Die meridionalen Geschwindigkeitskomponenten haben dort einfache Nullstellen; v_r und v_θ verschwinden im Mittelpunkt.



b) Als weiteres Beispiel betrachten wir die meridionalen Zirkulationen, die das Rotationsgesetz $\omega = \frac{\text{konst.}}{z^2}$ hervorruft, wobei wir eine Umgebung des Sternmittelpunkts ausschalten wollen. Es sei jetzt ω^* ein Mittelwert von ω in dem betrachteten Bereich. Dann gilt für die Größenordnung der meridionalen Zirkulationen wieder

$$v_{r2} \sim v^* \chi^*, \quad v_{r1} = 0 \quad (l > 2).$$

Zur Berechnung der Stromlinien dient wieder die Gl. (41). Die Abb. 2 zeigt den Verlauf der Stromlinien. Auch hier wird die meridionale

Geschwindigkeit, an der Sternoberfläche singular, weil sich wieder das Vernachlässigen von Trägheit, Reibung usw. in (19), (20) rächt.

Die beiden Beispiele a) und b) zeigen, wie empfindlich die meridionalen Strömungen vom Rotationsgesetz abhängen. So hat man beim Standardmodell bei starrer Rotation (in der Theorie erster Ordnung) keine Zirkulationen, beim Rotationsgesetz $\omega = \frac{\text{konst}}{z^2}$ das Strömungsbild Abb. 2 und bei dem Rotationsgesetz der Theorie nullter Ordnung, das zwischen jenen beiden liegt, das Strömungsfeld der Abb. 1. Das dem Beispiel a) zugrunde liegende Rotationsgesetz $\omega = \omega_0$ ähnelt in den äußeren Bereichen des Modells dem Gesetz $\omega = \frac{\text{konst}}{z^2}$; dementsprechend ähneln sich dort auch die meridionalen Zirkulationen: die Materie steigt an den Polen auf und sinkt am Äquator ab.

9. Das Konsistenzproblem

In den letzten drei Abschnitten haben wir zu einem vorgegebenen Rotationsgesetz jeweils die Lösungen der gestörten Aufbaugleichungen betrachtet und aus ihnen die meridionalen Zirkulationen berechnet ohne Rücksicht darauf, ob das Rotationsgesetz mit der q -Komponente der Bewegungsgleichung vereinbar ist oder nicht. Nach dieser Methode verfahren bisher alle Autoren, die meridionale Strömungen in rotierenden Sternen berechnet haben. SCHWARZSCHILD (1942), SWEET (1950) und ÖPIK (1950) gingen jeweils von der starren Rotation aus. Es ist klar, daß bei nicht gerade extrem langsam rotierenden Sternen die Coriolis-Kräfte, die durch die meridionalen Strömungen hervorgerufen werden, eine Abweichung von der Rotation mit sich bringen. Aber auch bei so extrem langsam rotierenden Sternen, bei denen die Coriolis-Kräfte gegenüber den anderen Gliedern der q -Komponente der Bewegungsgleichung vernachlässigbar sind, ist die starre Rotation über ein Zeitintervall hin keine Lösung der Bewegungsgleichung, wenn man den Drehimpulstransport durch den Strahlungsstrom berücksichtigt (vgl. I). Daher geben die Lösungen der oben genannten Untersuchungen auch bei beliebig langsamer Rotation kein mit der Bewegungsgleichung konsistentes Bild. Man muß ihre Ergebnisse vielmehr so deuten, daß man die jeweiligen Sternmodelle für einen Anfangszeitpunkt t_0 künstlich zu starrer Rotation zwingt. Dann entstehen die von den Autoren berechneten meridionalen Zirkulationen (die bei der Rechnung von SCHWARZSCHILD gerade identisch verschwinden). Die Bewegungsgleichung ändert aber vom Zeitpunkt t_0 an das Rotationsgesetz. Dasselbe gilt auch für die in Abschnitt 8 b) angegebenen Zirkulationen des Gesetzes $\omega = \frac{\text{konst}}{r^2}$. Dagegen sind die in Abschnitt 8 a) berechneten Zirkulationen bei hinreichend langsamer Rotation mit der q -Kompo-

nente der Bewegungsgleichung vereinbar. Die Grenzggeschwindigkeit, von der ab die Coriolis-Kräfte das Rotationsgesetz merklich beeinflussen, wurde bereits in I, Abschnitt 9 berechnet und diskutiert (vgl. auch Einleitung, S. 28).

Das Problem, Lösungen des gesamten Gleichungssystems zu finden, bei dem die Coriolis-Kräfte in der Bewegungsgleichung mitberücksichtigt werden, ist die Hauptschwierigkeit Theorie erster Ordnung, da man im allgemeinen Fall ein sehr kompliziertes, nichtlineares Gleichungssystem erhält. Setzt man nämlich in (28) die meridionalen Geschwindigkeiten mit Hilfe der Stromfunktion ein, so erhält man z. B. für das Standardmodell

$$\begin{aligned} & \frac{r^{*2} \varrho^*}{\eta^*} u^3 \frac{\partial \omega_l}{\partial t} + \frac{\chi^*}{\alpha^*} \sum_{i,k} \left\{ i(i+1) \tilde{S}_i \frac{1}{z^4} \frac{\partial z^2 \omega_k}{\partial z} (i,k)_l - \right. \\ & \left. - \frac{1}{z^2} \frac{d\tilde{S}_i}{dz} \omega_k (\bar{i}, 2 \cotg \vartheta P_k - P_k^1)_l \right\} - \delta u' \frac{1}{z^2} \frac{\partial z^2 \omega_l}{\partial z} - \\ & - \left\{ \frac{1}{z^4} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^4 \tilde{\eta} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \frac{\tilde{\eta}}{z^2} \left[l(l+1) \omega_l + \sum_i (\bar{i}; 2 \cotg \vartheta)_l \omega_i \right] \right\} = 0, \\ \tilde{S}_l &= \frac{z^2}{l(l+1)u'} \left\{ -\frac{1}{2} J_l(z^2 \tau_l) - \frac{1}{2} \frac{\beta}{4-3\beta} J_l \left[\frac{u}{u'} (z^2 \tau_l)' + z \sigma_l \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{z^2(4-3\beta)} [z^2(z^2 \tau_l)' + z^3 \sigma_l]' \right\}, \\ & \left(\alpha^* = \frac{\eta^*}{r^* \varrho^* v^*}, \delta = -\frac{F^* r^*}{c^2 \eta^*}, \chi^* = \frac{\omega^{*2}}{2\pi G \varrho^*} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Da es sehr schwierig ist, eine Lösung dieses nichtlinearen partiellen Systems zu finden, müssen wir uns daher im folgenden auf Näherungen und allgemeine Aussagen über die Lösungen beschränken.

Für hinreichend langsame Rotation erhält man eine Lösung, wenn man die Bewegungsgleichung linearisiert indem man von einem Rotationsgesetz der Theorie nullter Ordnung ausgeht, die meridionalen Zirkulationen berechnet und die Abweichungen, welche die Coriolis-Kräfte mit sich bringen, im Sinne einer linearen Störungstheorie behandelt. Dies wird im nächsten Abschnitt geschehen.

10. Die linearisierte Bewegungsgleichung

Es sei $\omega_{00}(r, t) = \omega^* u_{00}(r) e^{-\lambda t}$ die ausgezeichnete Lösung der Theorie nullter Ordnung des Standardmodells. Die zu ihr gehörigen meridionalen Strömungen rufen Abweichungen des wirklich im Stern auftretenden Rotationsgesetzes ω von ω_{00} hervor. Die Rotation gehe so langsam vor sich, daß man ω in der Form

$$\omega = \omega_{00}(r, t) + \omega_{02}(r, t) + \omega_{20}(r, t) P_2 \quad (47)$$

ansetzen und ω_{02} und ω_{20} als klein gegenüber ω_{00} ansehen kann, so daß

höhere Glieder in ω_{02} und ω_{20} vernachlässigt werden dürfen. Geht man damit und mit

$$v_r = v_{r2}(r) e^{-2\lambda t} P_2, \quad v_\vartheta = v_{\vartheta 2} e^{-2\lambda t} P_2^1$$

in das System (28), so erhält man, da ω_{00} der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho_0 \omega_{00}) + \frac{1}{c^2 r^4} (r^4 F_{r0} \omega_{00})' - \frac{1}{r^4} (\eta_0 r^4 \omega_{00}')' = 0$$

genügt und da $(2)_0 = 0$, $(2)_2 = 1$, $(\bar{2}; 2 \cot g \theta)_0 = 2$, $(\bar{2}; 2 \cot g \theta)_2 = 4$ die beiden Gleichungen

$$\varrho_0 \frac{\partial \omega_{02}}{\partial t} + \varrho_0 e^{-3\lambda t} \frac{2}{r} w_{00} v_{\vartheta 2} + \frac{F_{r0}}{c^2 r^2} (r^2 \omega_{02})' - \frac{1}{r^4} (r^4 \eta_0 \omega_{02}')' + \frac{2}{r^2} \eta_0 \omega_{20} = 0, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial \omega_{20}}{\partial t} + \varrho_0 e^{-3\lambda t} \left[v_{r2} \cdot \frac{1}{r^2} (r^2 w_{00})' + \frac{4}{r} v_{\vartheta 2} w_{00} \right] + \frac{F_{r0}}{c^2 r^2} (r^2 \omega_{20})' - \\ - \frac{1}{r^4} (r^4 \eta_0 \omega_{20}')' + \frac{10}{r^2} \eta_0 \omega_{20} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Aus ihnen kann man ablesen, daß ω_{02} und ω_{20} in der Form

$$\omega_{02} = \sigma w_{02}(r) e^{-3\lambda t}, \quad \omega_{20} = \sigma w_{20}(r) e^{-3\lambda t}$$

angesetzt werden können, worin σ ein konstanter Faktor ist, über den wir sogleich verfügen werden. Mit

$$\frac{\partial \varrho_0}{\partial t} = -\frac{\varepsilon \varrho_0}{c^2}, \quad A = 3 \frac{r^{*2} \varrho^*}{\eta^*} \lambda, \quad \sigma = \frac{\varrho^* v^* \omega^* r^{*2} \chi^*}{\eta^*};$$

$$\tilde{v}_{r2} = \frac{6}{z^2 u^3} \tilde{S}_2, \quad \tilde{v}_{\vartheta 2} = \frac{1}{zu^3} \frac{d\tilde{S}_2}{dz}$$

erhält man schließlich für das Standardmodell das System

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{02}}{dz^2} + \left(\frac{4}{z} + \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{d\tilde{\eta}}{dz} + \frac{\delta}{\tilde{\eta}} \frac{du}{dz} \right) \frac{dw_{02}}{dz} + \left(\frac{2\delta}{z\tilde{\eta}} \frac{du}{dz} + A \frac{1}{\tilde{v}} \right) w_{02} \\ - \frac{2w_{00}}{z^2 \tilde{\eta}} \frac{d\tilde{S}_2}{dz} + \frac{2}{z^2} w_{20}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{20}}{dz^2} + \left(\frac{4}{z} + \frac{1}{\tilde{\eta}} \frac{d\tilde{\eta}}{dz} + \frac{\delta}{\tilde{\eta}} \frac{du}{dz} \right) \frac{dw_{20}}{dz} + \left(\frac{2\delta}{z\tilde{\eta}} \frac{du}{dz} - \frac{10}{z^2} + A \frac{1}{\tilde{v}} \right) w_{20} \\ = \frac{6}{z^2 \tilde{\eta}} \left(w_{00}' + \frac{2}{z} w_{00} \right) \tilde{S}_2 - \frac{4}{z^2 \tilde{\eta}} w_{00} \frac{d\tilde{S}_2}{dz}. \end{aligned} \quad (51)$$

Als Randbedingungen hat man zu erfüllen

$$(w_{02})_{z=0} \text{ endlich}, \quad (w_{02}')_{z=0} = 0, \quad (w_{02})_{z=z^*} \text{ endlich};$$

$$(w_{20})_{z=0} = 0, \quad (w_{20}')_{z=0} = 0, \quad (w_{20})_{z=z^*} \text{ endlich}.$$

Für $z=0$ besitzen w_{20} und w_{02} Reihenentwicklungen der Form

$$w_{20} = \sum_{i=0}^{\infty} z_{2i} z^{2i},$$

w_{02} entsprechend. Bei $z = z^*$ sind die Inhomogenitätsglieder beider Gleichungen singular und verhalten sich wie $(z - z^*)^{-1}$. Trotzdem besitzen w_{20} und w_{02} dort Reihenentwicklungen der Form

$$w_{20} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i/2} (z^* - z)^{i/2},$$

w_{02} entsprechend, wie man unmittelbar durch Einsetzen zeigen kann.

Als numerisches Beispiel wurden zu dem in I berechneten ausgezeichneten Rotationsgesetz die Funktionen w_{20} und w_{02} berechnet. Wie in I setzten wir $c_2/c_1 = 0.447$ und nahmen $A = 9.7$ an, etwa dem dreifachen des dort berechneten niedrigsten Wertes für $\frac{\tau^{*2} \varrho^*}{\eta^*} \lambda$.

Die praktische Berechnung wurde mit der Lösung von (51) begonnen. Es wurden die regulären Reihenentwicklungen der Lösung w_{20} für $z = 0$ und $z = z^*$ bestimmt und dann je zwei partikuläre Integrale nach dem Interpolationsverfahren von ADAMS-STÖRMER von $z = 0$ bis $z = z^*/2$ und von $z = z^*$ bis $z = z^*/2$ gerechnet.

Dabei erwies es sich als zweckmäßig, bei der Rechnung von innen nach außen $|z|$ und bei der Rechnung von außen nach innen $|z^* - z|$ als unabhängige Variable zu benutzen. Dadurch wurde es möglich, mit relativ kurzen Reihenentwicklungen arbeiten zu können. Die beiden Integrale für den Innenbereich wurden nun so linear kombiniert, daß sie an der Stelle $z = z^*/2$ mit einer passenden Linearkombination der beiden Integrale des Außenbereiches in Funktionswert und erster Ableitung übereinstimmen. Eine so vorgenommene Zusammenfügung der vier parti-

kulären Integrale führt eindeutig auf die Lösung w_{20} , die alle gewünschten Randbedingungen erfüllt. Mit dem so erhaltenen w_{20} wurde das Inhomogenitätsglied von (50) berechnet. Bei der Lösung von (50) wurde dann genauso verfahren wie bei der Lösung von (51).

In den Abb. 3 und 4 sind w_{20} und w_{02} dargestellt. Da bei den so erhaltenen Lösungen w_{20} im ganzen Stern negativ ist, so folgt, daß im ganzen Stern der Pol rascher rotiert als der

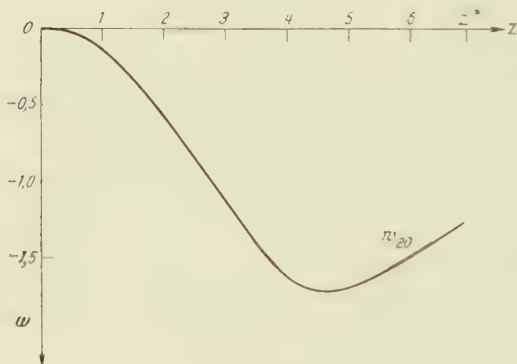


Abb 3. Die Funktion w_{20} .

Äquator. Nimmt man als Beispiel $\sigma \epsilon^{-2\lambda t} = \frac{1}{70}$ an, so zeigt Abb. 5 die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \epsilon^{-\lambda t} (w_{00} + \sigma \epsilon^{-2\lambda t} w_{02} + \sigma \epsilon^{-2\lambda t} w_{20} P_2)$$

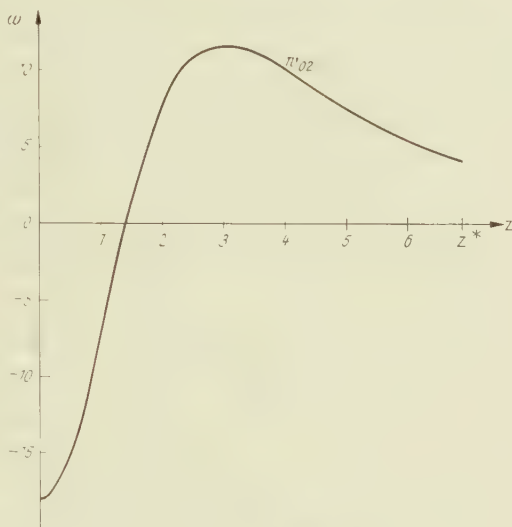
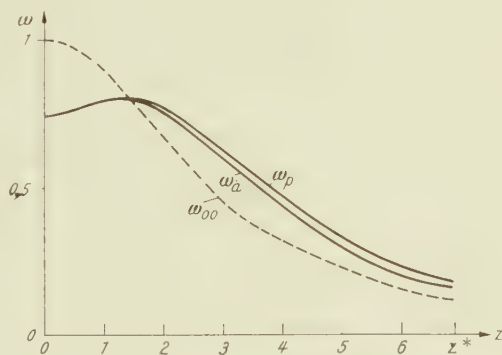
auf der Rotationsachse (ω_p) und in der Äquatorebene (ω_{θ}) in Abhängigkeit vom Mittelpunktsabstand.

Die hier berechneten und in den Abb. 3–5 dargestellten Lösungen gelten nicht mehr für oberflächennahe Bereiche, da sich dort die meridionalen Strömungen anders verhalten als die in Abschnitt 8 berechnete Stromfunktion angibt. Wenn der Stern eine Wasserstoffkonvektionszone besitzt, dann müssen

die Zirkulationen an die in der Konvektionszone nach BIERMANN (1956) existierenden meridionalen Zirkulationen angepaßt werden. Ferner muß ω gewissen Grenzbedingungen an der inneren Grenze der Konvektionszone genügen. Die genauen Anpassungsbedingungen können jedoch erst gegeben werden, wenn die Dynamik rotierender Konvektionszonen unter Berücksichtigung der dort vorhandenen anisotropen turbulenten Viskosität eingehender untersucht ist. Besitzt der Stern keine Konvektionszone, dann

müssen sich die oberflächennahen Stromlinien der Abb. 1 nach den in Abschnitt 8 bereits angeführten Gründen unterhalb der Oberfläche schließen; die Strömung muß in der Nähe der Oberfläche äquatorwärts fließen. Das heißt, daß die Funktion $d\tilde{S}_2/dz$, die bei $z=6$ negativ ist, nach außen hin noch einmal ein positives Maximum erreicht und für $z \rightarrow z^*$ so nach

null geht, daß $\frac{1}{u^3} d\tilde{S}_2 dz$ endlich bleibt und $\frac{1}{u^3} \tilde{S}_2$ an der Oberfläche verschwindet. In diesem äußeren Bereich vereinfachen sich die Gleichungen (50), (51) sehr, wenn man sich mit genäherten Lösungen begnügt. In der

Abb. 4. Die Funktion w_{02} Abb. 5. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = w_{00} + \frac{1}{70}$ ($w_{02} + w_{20} P_2$) am Pol (w_p) und in der Äquatorebene (w_a). Die gestrichelte Kurve stellt das ausgezeichnete Rotationsgesetz der Theorie nullter Ordnung dar

Nähe der Oberfläche sind beim Standardmodell wegen der nach null gehenden Zähigkeit in den beiden Differentialgleichungen nur die Glieder wesentlich, die den Faktor $1/\tilde{\eta}$ besitzen. Das Glied mit $1/\tilde{\nu}$ verschwindet gleichfalls an der Oberfläche und kann weggelassen werden.

Da außerdem $\frac{d\tilde{\eta}}{dz} = (c_1 u^{3/2} - c_2) \frac{du}{dz}$ außen nahe bei $c_2 \frac{du}{dz}$ liegt, so erhält man aus (50), (51)

$$(c_2 + \delta) \frac{du}{dz} \frac{dw_{02}}{dz} + \frac{2\delta}{z} \frac{du}{dz} w_{02} = - \frac{2w_{00}}{z^2} \frac{d\tilde{S}_2}{dz},$$

$$(c_2 + \delta) \frac{du}{dz} \frac{dw_{20}}{dz} + \frac{2\delta}{z} \frac{du}{dz} w_{20} = \frac{6}{z^4} \frac{d(z^2 w_{00})}{dz} \tilde{S}_2 - \frac{4}{z^3} w_{00} \frac{d\tilde{S}_2}{dz}.$$

Die Lösungen dieser beiden Gleichungen kann man sofort angeben. Es ist

$$w_{02} = - \frac{\delta_1}{\delta} z^{-\delta_1} \left(\int z^{\delta_1-2} w_{00} \left(\frac{du}{dz} \right)^{-1} \frac{d\tilde{S}_2}{dz} dz + \text{konst.} \right), \quad \left(\delta_1 = \frac{2\delta}{c_2 + \delta} \right),$$

$$w_{20} = \frac{\delta_1}{\delta} z^{-\delta_1} \left[\tilde{S} \int z^{\delta_1-4} \left(\frac{du}{dz} \right)^{-1} \frac{d(z^2 w_{00})}{dz} \tilde{S}_2 dz - \right. \\ \left. - 2 \int z^{\delta_1-2} \left(\frac{du}{dz} \right)^{-1} w_{00} \frac{d\tilde{S}_2}{dz} dz + \text{konst.} \right].$$

Wenn man von einer bestimmten Stelle ab nach außen die früher gewonnenen Lösungen, die in der Nähe der Oberfläche falsch sind, durch die neuen Ausdrücke ersetzen will, so muß man die Konstanten so wählen, daß w_{02} und w_{20} stetig sind.

Die neuen Ausdrücke gestatten nun die in Oberflächennähe äquatorwärts fließenden Zirkulationen zu berücksichtigen. Wenn in dem äußeren Bereich $d\tilde{S}_2/dz$ ein positives Maximum besitzt, dann liefert das Integral rechts wegen $du/dz > 0$ einen positiven Beitrag zu w_{02} , d. h. w_{02} wächst im äußeren Bereich noch einmal an. Einen positiven Beitrag liefert auch das zweite Integral im Ausdruck für w_{20} . Das erste Integral ist demgegenüber klein, da außen $z^2 w_{00}$ nahezu konstant ist. Daher wächst auch w_{20} nach außen hin noch einmal an, so daß zu erwarten ist, daß in der Nähe der Oberfläche w_{20} sein Vorzeichen wechselt und an der Oberfläche die Winkelgeschwindigkeit am Pol kleiner ist als am Äquator. Die oben angegebenen Ausdrücke für w_{02} , w_{20} reichen aus, um die in diesem Abschnitt berechneten Winkelgeschwindigkeiten in der Nähe der Oberfläche zu korrigieren, wenn man vorgibt, wie sich die Stromlinien in der Nähe der Sternoberfläche schließen sollen.

Die hier benutzte Methode der näherungsweisen Lösung des allgemeinen Gleichungssystems läßt sich noch etwas allgemeiner formulieren. Wir zeigen dies wieder am Standardmodell. Anstelle der Reihenentwicklung (47) setzen wir jetzt allgemein

$$\omega = \omega^* \sum_{i,k} \sigma^{(i+k-1)} w_{ik}(z) e^{-(i+k+1)\lambda t} P_k$$

und

$$Q = \sum_{i,k} Q_{ik}(z) e^{-(i+k)\lambda t} P_k \quad (\Phi, F_r, v_r \text{ entsprechend})$$

sowie

$$F_\vartheta = \sum_{i,k} F_{\vartheta ik}(r) e^{-(i+k)\lambda t} P_k^1 \quad (v_\vartheta \text{ entsprechend}).$$

Q_{00} , Φ_{00} usw. sind die Funktionen des nichtrotierenden Modells. Die Größen Q_{0k} , Φ_{0k} ($k \geq 2$) usw. stellen die radialsymmetrischen Störungen des Modells, die Q_{ik} , Φ_{ik} usw. ($i, k \geq 2$) die durch die Rotation hervorgerufenen Abweichungen von der Radialsymmetrie dar, die hier noch einmal nach ihrer Zeitabhängigkeit aufgespalten sind. Die Funktionen w_{00} , w_{02} , w_{20} haben wir oben berechnet. Aus ihnen kann man mit Hilfe von (15), (16) die neuen τ_2 , σ_2 und τ_4 , σ_4 berechnen, wobei wir unter ω_k die Teilsumme $\omega^{*2} \sum_i w_{ik} e^{-(i+k-1)\lambda t}$ verstehen, wobei jetzt höhere Glieder in den w_{02} , w_{20} nicht weggelassen werden. Die τ_2 , τ_4 , σ_2 , σ_4 spalten sich dann auf in

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau_{20} e^{-2\lambda t} + \tau_{22} e^{-4\lambda t}, \\ \tau_4 &= \tau_{40} e^{-4\lambda t} + \tau_{42} e^{-6\lambda t} \end{aligned}$$

und man erhält entsprechende Aufspaltungen für die σ_2 , σ_4 . Aus (41) findet man dann zeitliche Aufspaltungen für v_{rk} , $v_{\vartheta k}$

$$\begin{aligned} v_r &= (v_{r20} e^{-2\lambda t} + v_{r22} e^{-4\lambda t}) P_2 + (v_{r40} e^{-4\lambda t} + v_{r42} e^{-6\lambda t}) P_4, \\ v_\vartheta &= (v_{\vartheta20} e^{-2\lambda t} + v_{\vartheta22} e^{-4\lambda t}) P_2^1 + (v_{\vartheta40} e^{-4\lambda t} + v_{\vartheta42} e^{-6\lambda t}) P_4^1. \end{aligned}$$

Dabei sind v_{r20} und $v_{\vartheta20}$ mit den am Anfang dieses Abschnittes berechneten Funktionen v_{r2} , $v_{\vartheta2}$ identisch. Die neu hinzukommenden Koeffizienten v_{r22} , v_{r40} usw. stellen die durch ω_{02} , ω_{20} neu hinzukommenden Störungen der meridionalen Strömungen dar. Geht man damit in die Bewegungsgleichung, so erhält man nach der Aufspaltung gemäß der Zeitabhängigkeit der verschiedenen Glieder gewöhnliche, lineare, inhomogene Gleichungen für ω_{62} , ω_{44} , ω_{26} , ω_{08} , ω_{60} , ω_{42} , ω_{24} , ω_{06} , ω_{40} , ω_{22} , ω_{04} . Das Inhomogenitätsglied hängt dabei nur von ω_{00} , ω_{02} , ω_{20} ab. Da die Gleichungen die gleiche Struktur haben wie (50), (51), so lassen sich mit ihnen gerade die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \omega_{0k} &\text{ endlich bei } r=0 \text{ und } r=R \\ (\omega_{ik})_{r=0} &= 0 \text{ und } (\omega_{ik})_{r=R} \text{ endlich } (i \neq 0) \text{ erfüllen.} \end{aligned}$$

Mit den so erhaltenen Funktionen ω_{ik} kann man fortfahren und neue v_{rik} , $v_{\vartheta ik}$ berechnen und so die Entwicklungen beliebig weit fortsetzen. Praktisch bedeutet dies, daß man von der Lösung der Theorie nullter Ordnung ausgehend die zugehörigen meridionalen Strömungen bestimmt, deren Störungen auf das Rotationsgesetz herleitet, daraus zusätzliche meridionale Strömungen herleitet und so (auf die Konvergenz des Verfahrens hoffend) fortfährt.

Allgemeine Konvergenzkriterien für das Verfahren sind sehr schwer zu finden. Es ist sicher, daß das Verfahren bei hinreichend langsamer Rotation konvergiert.

11. Das ausgezeichnete Rotationsgesetz

In I, Abschnitt 8 wurde bewiesen, daß in der Theorie nullter Ordnung das ausgezeichnete Rotationsgesetz kugelsymmetrisch ist und aus einem Eigenwertproblem hergeleitet werden kann. Wir verallgemeinern jetzt diesen Satz so, daß er auch für (nach dem Standardmodell aufgebaute)

Sterne gilt, für welche die linearisierte Theorie erster Ordnung anwendbar ist. In diesem Fall gilt:

Wenn ein nach dem Standardmodell aufgebauter Stern so langsam rotiert, daß für ihn die Theorie erster Ordnung mit linearisierter Bewegungsgleichung anwendbar ist, so strebt sein Rotationsgesetz aus jedem willkürlich vorgebbaren Anfangszustand (und dessen zugehörigem meridionalen Zirkulationssystem) einem ausgezeichneten Rotationsgesetz zu, das entweder die Form

$$a) \quad \omega(r, t) = w_{00}(r) e^{-\lambda(t-t_0)} + w_{02}(r) e^{-3\lambda(t-t_0)} + w_{20}(r) e^{-3\lambda(t-t_0)} P_2$$

besitzt oder es strebt dem ausgezeichneten Rotationsgesetz der Theorie nullter Ordnung

$$b) \quad \omega(r, t) = w_{00}(r) e^{-\lambda(t-t_0)}$$

zu.

Hierbei sind w_{00} , w_{02} , w_{20} die in diesem Abschnitt definierten Funktionen. Die Einstellzeit des ausgezeichneten Rotationsgesetzes ist die gleiche wie in der Theorie nullter Ordnung. Der Fall b) tritt dann ein, wenn der Stern während der Zeit, während der er sein ausgezeichnetes Rotationsgesetz anstrebt, bereits soviel Drehimpuls verloren hat und bei Erreichen des ausgezeichneten Rotationsgesetzes bereits so langsam rotiert, daß für ihn die Theorie nullter Ordnung angewendet werden kann. Auch das Rotationsgesetz des Falles a) geht aus dem gleichen Grunde nach hinreichend langer Zeit in das Rotationsgesetz der Theorie nullter Ordnung über.

Der oben aufgestellte Satz leuchtet unmittelbar ein, wenn man beachtet, daß in der linearisierten Theorie erster Ordnung das Rotationsgesetz aus einem von der Theorie nullter Ordnung herrührenden Anteil $\omega_{00}(r, \vartheta, t)$ und den von den meridionalen Zirkulationen herrührenden Störungen $\omega^s(r, \vartheta, t)$ besteht. ω_{00} strebt nach dem ausgezeichneten Rotationsgesetz $w_{00}(r) e^{-\lambda(t-t_0)}$ und die zugehörigen Störungen werden

$$\omega^s(r, \vartheta, t) = e^{-3\lambda(t-t_0)} (w_{02}(r) + w_{20}(r) P_2),$$

worin w_{02} , w_{20} identisch mit den Lösungen von (50), (51) sind.

Es sei $W(r, \vartheta)$ das vorgegebene Rotationsgesetz. Sind w_{rk} die Eigenfunktionen und λ_{rk} die Eigenwerte des durch

$$\left(\lambda \varrho - \sigma_k \frac{\eta}{r^2} \right) w - \frac{F}{c^2 r^2} (r^2 w)' + \frac{1}{r^4} (\eta r^4 w') = 0, \quad (w')_{r=0} = 0, \quad w'_{r=R} \text{ endlich}$$

definierten Eigenwertproblems (vgl. I, S. 180) und f_k , σ_k Eigenfunktionen und Eigenwerte des durch

$$\frac{1}{\sin^3 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin^3 \vartheta \frac{df}{d\vartheta} \right) + \sigma f = 0; \quad (f)_{\vartheta=0} \text{ endlich, } (f)_{\vartheta=\pi/2} \text{ endlich}$$

festgelegten Eigenwertproblems (vgl. I. S. 180), dann existiert eine Reihenentwicklung

$$W(r, \vartheta) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \gamma_{ik} w_{ik} f_k.$$

Dann stellt

$$\omega(r, \vartheta, t) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \gamma_{ik} w_{ik} f_k e^{-\lambda_{ik} t} \quad (52)$$

eine Lösung der Gleichung der Theorie nullter Ordnung dar, die für $t \rightarrow 0$ in $W(r, \vartheta)$ übergeht. Zu $\omega(r, \vartheta, t)$ kann man nun gemäß (29), (41) eine Stromfunktion der zugehörigen meridionalen Strömungen berechnen. In Abschnitt 5 wurde gezeigt, daß man die zu diesen Strömungen gehörigen Störungen $\bar{\omega}(r, \vartheta, t)$ berechnen kann. Da wir hierbei den einfachen Fall haben, daß die Inhomogenitätsglieder J_l Entwicklungen der Form

$$J_l = \sum_{n=1}^{\infty} J_{ln} e^{-m_n t} \quad (m_1 = 3 \lambda_{11})$$

besitzen, haben wir

$$\bar{\omega}_l = \sum_n \bar{\omega}_{ln} e^{-m_n t}.$$

Nun entwickeln wir die Funktion

$$\bar{W}(r, \vartheta) = W(r, \vartheta) - \left[\bar{\omega}(r, \vartheta, t) \right]_{t=0}$$

nach $\omega_{ik} f_k$:

$$\bar{W} = \sum_{i,k} \bar{\gamma}_{ik} w_{ik} f_k$$

und bilden die Funktion

$$\bar{\omega}(r, \vartheta, t) = \sum_{i,k} \bar{\gamma}_{ik} w_{ik} f_k e^{-\lambda_{ik} t} + \bar{\omega}(r, \vartheta, t). \quad (53)$$

Sie ist — bis auf Größen, die in $\bar{\omega}/\omega$ von höherer Ordnung sind — eine Lösung des Gleichungssystems der Theorie erster Ordnung und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{\omega}(r, \vartheta, t) = W(r, \vartheta).$$

Die letztere Beziehung folgt unmittelbar. Daß (53) eine Lösung der Theorie erster Ordnung ist, folgt daraus, daß

$$\sum_{i,k} \bar{\gamma}_{ik} w_{ik} e^{-\lambda_{ik} t} f_k \quad (54)$$

eine Lösung der Theorie nullter Ordnung ist. Damit dieser Ausdruck auch eine Lösung der Theorie erster Ordnung wird, müssen die durch die zugehörigen meridionalen Strömungen verursachten Störungen hinzugefügt werden. Dies wird in (53) auch getan, allerdings werden die Störungen hinzugefügt, die zum Rotationsgesetz (52) gehören. Der dadurch entstehende Fehler ist in $\bar{\omega}/\omega$ von höherer Ordnung. Man kann jetzt so fortfahrend die zu (54) gehörigen Störungen $\bar{\bar{\omega}}$ bestimmen und

$$\bar{\bar{W}} = \bar{W} - \bar{\bar{\omega}} = \sum_{i,k} \bar{\bar{\gamma}}_{ik} w_{ik} f_k, \quad \bar{\bar{\omega}} = \sum_{i,k} \bar{\bar{\gamma}}_{ik} w_{ik} f_k e^{-\lambda_{ik} t} + \bar{\bar{\omega}}$$

entwickeln und so das Verfahren beliebig verbessern. Für das Folgende interessieren uns nur die niedrigsten Glieder der Entwicklung (53) bzw. die durch mehrmalige Verbesserungen gewonnenen Entwicklungen, die aber die gleiche Form

besitzen wie (53). Es ist

$$\sum_{i,k} \bar{\gamma}_{ik} w_{ik} e^{-\lambda_{ik}t} f_k = \gamma_{11} w_{11} e^{-\lambda_{11}t} + \gamma_{12} w_{12} e^{-\lambda_{12}t} f_2 + \gamma_{21} e^{-\lambda_{21}t} + \dots$$

und

$$\omega(r, \vartheta, t) = \gamma_{11}^3 w_{02} e^{-\lambda_{11}t} + \gamma_{11}^3 w_{20} e^{-\lambda_{11}t} P_2 + \dots$$

Wie bereits in I gezeigt wurde, bestehen die Ungleichungen

$$\lambda_{11} < \lambda_{12}, \quad \lambda_{11} < \lambda_{21}$$

und es sind jetzt genau zwei Fälle möglich:

a) $3 \lambda_{11} < \text{Min}(\lambda_{12}, \lambda_{21})$: Dann nähert sich bei beliebigen Werten für γ_{21} , γ_{12} das Rotationsgesetz nach hinreichend langer Zeit dem Gesetz

$$\gamma_{11} w_{11} e^{-\lambda_{11}t} + \gamma_{11}^3 (w_{02} + w_{20} P_2) e^{-\lambda_{11}t}$$

oder es ist

b) $3 \lambda_{11} \geq \text{min}(\lambda_{12}, \lambda_{21})$: Dann ist das vom Anfangszustand unabhängige Rotationsgesetz gleich

$$\gamma_{11} w_{11} e^{-\lambda_{11}t}.$$

Geht man von den in I benutzten Bezeichnungen w_{11} , λ_{11} zu den weiter oben benutzten w_{00} , λ über und setzt man $\gamma_{11} = \gamma^*$, so erhält man genau die Behauptungen unseres Satzes.

12. Die nichtlineare Bewegungsgleichung

Der einfacheren Darstellung halber vernachlässigen wir im folgenden vorerst den Drehimpulstransport durch den Strahlungsstrom. Die Bewegungsgleichung besitzt dann eine stationäre Lösung.

Wir betrachten jetzt einen Stern, dessen Rotation nicht so extrem langsam sei, daß man die linearisierte Bewegungsgleichung benutzen kann. Die φ -Komponente läßt sich in der Form

$$\frac{\varrho^* v^* \chi^*}{r^*} \left(\frac{1}{r^2} \varrho v_r \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} + \varrho v_\vartheta \frac{1}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta} \right) - \frac{\eta^*}{r^* z} \left\{ \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r^4 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^3 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\eta \sin^3 \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right) \right\} = 0, \quad \chi^* = \frac{\omega^*}{2\pi G \varrho^*} \quad (55)$$

schreiben. Dabei sind ϱ , v_r , v_ϑ , ω , η , r hier und überall in diesem Abschnitt dimensionslose Größen. Die eine Dimension tragenden Konstanten ϱ^* , v^* , ω^* , η^* , r^* seien so gewählt, daß die dimensionslosen Funktionen ϱ , v_r , v_ϑ , ω , η , r in mittleren Bereichen des Sterns von der Größenordnung eins sind. Die Rotation des Modells möge jetzt so rasch sein, daß

$$\chi^* \gtrsim \alpha^* = \frac{\eta^*}{r^* \varrho^* v^*}, \quad (56)$$

sie sei aber nicht so rasch, daß die Theorie erster Ordnung nicht mehr anwendbar ist. Aus den in der Einleitung angegebenen Abschätzungen folgt, daß es einen Geschwindigkeitsbereich gibt, in dem beide Forderungen erfüllt sind.

Geht man mit einem willkürlichen Rotationsgesetz ω in (55) hinein, so ist die linke Seite von (55) von null verschieden und man erhält im allgemeinen (d. h. abgesehen von ganz speziellen Fällen des Rotationsgesetzes ω) eine Ungleichung der Form

$$\frac{\varrho^* v^* \chi^*}{r^*} \left(\frac{1}{r^2} \varrho v_r \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} + \varrho v_\vartheta \frac{1}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta} \right) \geq - \frac{\eta^*}{r^{*2}} \left\{ \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r^4 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^3 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\eta \sin^3 \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right) \right\}. \quad (57)$$

Das stationäre Rotationsgesetz muß diese Ungleichung zu einer Gleichung machen. Nun ist aber $\frac{\varrho^* v^* \chi^*}{r^*} \sim \frac{\eta^*}{r^{*2}}$. Das stationäre Rotationsgesetz muß also die Bedingung

$$\frac{1}{r^2} \varrho v_r \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} + \varrho v_\vartheta \frac{1}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r^4 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^3 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\eta \sin^3 \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right) \sim \frac{\alpha^*}{\chi^*} \leq 1$$

erfüllen. Es liegt nahe, anzunehmen, daß der dimensionslose Ausdruck $\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r^4 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^3 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\eta \sin^3 \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right)$ von der Größenordnung eins ist; dann gilt

$$\frac{1}{r} \varrho v_r \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} + \varrho v_\vartheta \frac{1}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta} \lesssim 1. \quad (58)$$

Dieser Schluß ist nicht zwangsläufig. Es wäre auch denkbar, daß die linke Seite von (58) von der Größenordnung eins ist und dafür $\partial^2 \omega / \partial r^2$ oder $\partial^2 \omega / \partial \vartheta^2$ von der Größenordnung χ^* / r^* wären. Das würde bedeuten, daß ω bei manchen Sternen im Innern um viele Zehnerpotenzen variieren muß. Diese Möglichkeit wollen wir im folgenden außer acht lassen.

Aus (58) folgt, daß sich ω nur wenig von einer Lösung der Gleichung

$$\frac{v_r}{r^2} \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta} = 0 \quad (59)$$

unterscheidet.

Bevor daraus weitere Schlüsse gezogen werden, wollen wir den Drehimpuls-transport durch den Strahlungsstrom berücksichtigen. In diesem Fall existiert keine stationäre Lösung der Bewegungsgleichung. Wir haben im vorigen Abschnitt gezeigt, daß ein ausgezeichnetes Rotationsgesetz existiert, wenn die linearisierte Bewegungsgleichung benutzt werden darf. Bei rascherer Rotation, bei der diese Linearisierung nicht mehr zulässig ist, wollen wir gleichfalls ein ausgezeichnetes Rotationsgesetz annehmen. Diese Voraussetzung läßt sich folgendermaßen plausibel machen. Vernachlässigt man den Drehimpuls-transport durch den Strahlungsstrom, dann strebt der Stern asymptotisch nach einem stationären Rotationsgesetz; $\partial \omega / \partial t$ strebt überall im Stern nach null. Wenn der Stern aber durch den Strahlungsstrom an der Flächeneinheit seiner Oberfläche pro Zeiteinheit den Drehimpuls

$$\frac{F_r}{c^2} \omega r^2 \sin^2 \vartheta$$

verliert, dann kann das Rotationsgesetz, das der Stern asymptotisch anstrebt, nicht mehr stationär sein, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho \Omega dV = - \frac{1}{c^2} \int_O F_r \Omega dO, \quad \Omega = \omega r^2 \sin^2 \vartheta$$

(wobei V die Integration über den ganzen Stern, O über seine Oberfläche andeuten soll). Reibung und Strahlungsstrom müssen den an der Oberfläche austretenden Drehimpuls aus dem Sterninnern nachliefern und es gibt keine Stelle im Stern, für die $\partial\omega/\partial t = 0$ ist. Bei dem ausgezeichneten Rotationsgesetz ist das Glied $\varrho \partial\omega/\partial t$ von der gleichen Größenordnung wie die von $\text{Div } \mathfrak{T}$ herrührenden Glieder in der ϑ -Komponente der Bewegungsgleichung. Mit diesen Annahmen läßt sich (55) auch unter Berücksichtigung des Drehimpulstransportes durch den Strahlungsstrom herleiten. In (55) treten links die Glieder $\varrho^* t^* \frac{\partial \varrho \omega}{\partial t}$ und $\frac{F^*}{c^2 r^*} \frac{1}{r^4} \frac{\partial r^4 F_r \omega}{\partial r}$

hinzu, bei denen t^* , F^* so gewählt seien, daß $\frac{\partial \varrho \omega}{\partial t} \sim 1$, $F \sim 1$. Es ist $\varrho^* t^*$ nach Voraussetzung von gleicher Größenordnung wie $\frac{F^*}{c^2 r^*}$. In (56) ist dann α^* zu ersetzen durch

$$A^* = \text{Max} \left(\alpha^*, \frac{F^*}{c^2 \varrho^* v^*} \right).$$

Dann läßt sich (58) auf die gleiche Weise folgern.

Gleichung (59) läßt sich durch Einführen der Stromfunktion S in die Form

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \frac{\partial S}{\partial r} = 0 \quad (60)$$

bringen. Die linke Seite ist die Funktionaldeterminante der Funktionen Ω und S in bezug auf die Variablen r, ϑ . Sieht man von der uninteressanten Lösung $\omega = 0$ und von der Lösung $S = 0$ ab, bei der überhaupt keine meridionalen Zirkulationen auftreten, so bleibt als einzige Möglichkeit der Fall $\Omega = \Omega(S)$ offen, welcher besagt, daß die Funktion Ω auf den Stromlinien $S = \text{konst.}$ eine Konstante ist.

13. Der Fall $\Omega = \Omega(S)$

Die Funktion Ω soll in dem nun zu betrachtenden Fall (bis auf geringfügige, z. B. von der Reibung abhängige Abweichungen in der Nähe der Rotationsachse) auf den Stromlinien der meridionalen Strömungen konstant sein. Damit ist aber das Rotationsgesetz nicht eindeutig festgelegt, denn erstens ist die Lage der Stromlinien unbekannt, und zweitens ist der funktionelle Zusammenhang $\Omega(S)$ noch völlig frei, d. h. wir wissen nicht, wie sich Ω beim Übergang von Stromlinie zu Stromlinie ändert. Über den Verlauf der Stromlinien wollen wir für das folgende nur voraussetzen, daß sie in einem Quadranten der r, ϑ -Ebene geschlossene Kurven sind, welche die Achsen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (Äquator) sowie die Kurve $r = R$ (Sternoberfläche) nicht überschreiten. Dies alles

folgt aus einfachen Symmetrieannahmen und den Oberflächenbedingungen. Ferner betrachten wir nur solche Stromlinien, die ganz in einem Bereich liegen, in dem 1. keine atomare Energieerzeugung stattfindet und 2. Strahlungsgleichgewicht herrscht, schalten also Stromlinien aus, die allzu nahe am Sternzentrum und an der Oberfläche vorbeiführen.

Die Coriolis-Glieder der Bewegungsgleichung (7)

$$\varrho_0 \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} + \varrho_0 \frac{v_\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta}$$

transportieren keinen Drehimpuls in meridionaler Richtung senkrecht zu den Stromlinien $S = \text{konst.}$ Der Drehimpulsaustausch in dieser Richtung, der allein die funktionelle Abhängigkeit $\Omega(S)$ bestimmt, wird also nur durch die übrigen Glieder der Bewegungsgleichung vermittelt.

Man kann nun einer Beweismethode von RANDERS (1941) folgend die Identitäten

$$\frac{1}{s^2} \mathbf{v}_m \text{grad } \Omega = \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial r^2 \omega}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin^2 \vartheta \omega}{\partial \vartheta}, \quad (s = r \sin \vartheta, \quad \mathbf{v}_m = (v_r, v_\vartheta)),$$

$$\frac{1}{s^2} \text{div}(\Omega \mathbf{f}) = \frac{1}{r^4} \frac{\partial r^4 F_r \omega}{\partial r} + \frac{1}{\sin^3 \vartheta} \frac{\partial \sin^3 \vartheta F_\vartheta \omega}{\partial \vartheta},$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\eta s^2 \text{grad } \omega) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta \frac{\partial \omega}{\partial r} s^2 \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\eta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} s^2 \right) + \frac{2}{r} \eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \cot \vartheta \eta \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

benutzen, um mit ihrer Hilfe (7) in die Form

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{s^2} \varrho \mathbf{v}_m \text{grad } \Omega - \frac{1}{c^2 s^2} \text{div}(\Omega \mathbf{f}) \\ - \frac{1}{s^2} \text{div}(\eta s^2 \text{grad } \omega) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \right) \end{aligned} \quad (61)$$

zu bringen. Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \varrho \mathbf{v}_m = 0$$

folgt

$$\text{div}(\varrho \mathbf{v}_m \Omega) = \varrho \mathbf{v}_m \text{grad } \Omega$$

also

$$\varrho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{s^2} \text{div} \left\{ -\varrho \mathbf{v}_m \Omega + \frac{1}{c^2} \Omega \mathbf{f} - \eta s^2 \text{grad } \omega \right\} = 0.$$

Integriert man beide Seiten über den von einer Stromlinienfläche O eingeschlossenen Torus-Körper T und wendet den Gaußschen Satz an, so erhält man wegen $\Omega = \text{konst}$ auf O

$$\int_T \varrho \frac{\partial \Omega}{\partial t} dV - \frac{1}{c^2} \Omega \int_O \mathbf{f}_n dO + \int_O s^2 \eta \text{grad}_n \omega dO = 0$$

wobei die Flächennormale n nach innen weisen möge. Nun ist aber nach Voraussetzung

$$\frac{1}{c^2} \int_{\dot{O}} \dot{\tau}_n dO = - \frac{1}{c^2} \int_{\dot{T}} \dot{t} \varrho dV = 0.$$

Daraus erkennt man, daß der Drehimpulstransport durch den Strahlungsstrom nur insofern Wirkung auf den funktionellen Zusammenhang $\Omega(s)$ hat, als er eine zeitliche Abhängigkeit des Rotationsgesetzes bedingt. Das ist eine Folge unserer Annahme, daß in dem betrachteten Bereich $\varepsilon = 0$ ist. Wegen

$$\eta s^2 \text{grad } \omega = \eta \text{grad } \Omega - 2 \eta s \omega \text{grad } s$$

folgt die Gleichung

$$\int_{\dot{T}} \varrho \frac{\partial \Omega}{\partial t} dV + \int_{\dot{O}} \eta \text{grad}_n \Omega dO = 2 \int_{\dot{O}} \eta s \omega \text{grad}_n s dO = 0.$$

Für das Oberflächenelement dO kann man schreiben $dO = 2\pi s dl$, wo dl das Linienelement einer meridionalen Stromlinie L in der r, ϑ -Ebene ist. Ferner ist $\text{grad}_n s = -\frac{dz}{dl}$. Somit wird

$$2 \int_{\dot{O}} \eta s \omega \text{grad}_n s dO = 4\pi \Omega \int_L \eta \text{grad}_n s dl = -4\pi \Omega \int_L \eta dz.$$

Damit erhält man

$$\int_{\dot{O}} \eta \frac{\partial \Omega}{\partial n} dO = - \int_{\dot{T}} \varrho \frac{\partial \Omega}{\partial t} dV - 4\pi \Omega \int_L \eta dz. \quad (62)$$

Nun sieht man, daß die Verteilung von Ω auf den verschiedenen Stromlinien, also die Funktion $\Omega(S)$ im wesentlichen von der Reibung und dem Strahlungsstrom bestimmt wird. Die linke Seite hängt davon ab, wie sich Ω beim Übergang von Stromlinie zu Stromlinie ändert: die rechte Seite wird bestimmt durch die Zähigkeit η und von der zeitlichen Änderung der Drehimpulsdichte Ω , die wiederum in dem betrachteten Endzustand vom Drehimpulstransport durch den Strahlungsstrom bestimmt wird. Die rechte Seite wird nun im allgemeinen Fall nicht null sein, denn das erste Integral hängt ab von der Drehimpulsabgabe des Sterns durch die Ausstrahlung, das zweite von der (räumlichen) Veränderlichkeit der Viskosität. Beide Integrale können sich daher nicht kompensieren, da sie von verschiedenen (voneinander unabhängigen) Mechanismen herrühren. Das zweite Integral verschwindet z. B. bei konstanter Viskosität, während das erste niemals null wird. Bei dem ausgezeichneten Rotationsgesetz sind die Vorzeichen beider Integrale übrigens so, daß sie sich gar nicht kompensieren können. Dann ist nämlich

$$\int_{\dot{T}} \varrho \frac{\partial \Omega}{\partial t} dV < 0.$$

Man kann nun weiter leicht einsehen, daß

$$4\pi\Omega\int_L\eta\,dz<0.$$

Führt man nämlich die Integration über eine Stromlinie der r, θ -Ebene im mathematisch positiven Umlaufssinn aus, so erhält man (vgl. Abb. 6) für den äußeren Teil BC $\eta\,dz > 0$, wobei aber zu beachten ist, daß längs des äußeren Teils η wesentlich kleiner ist als längs des inneren Teils CA . Dort ist $\eta\,dz < 0$. Längs AB ist dz im Mittel null, also liefert dort $\eta\,dz$ keinen wesentlichen Beitrag zum Integral. So wird der negative Beitrag längs CA überwiegen, das Integral wird negativ. Damit folgt aus (62)

$$\int_O\eta\frac{\partial\Omega}{\partial n}\,dO>0. \quad (63)$$

Die Funktion η ist auf der ganzen Fläche O positiv und $\partial\Omega/\partial n$ wechselt dort das Vorzeichen nicht. Daher folgt aus (63)

$$\partial\Omega/\partial n > 0,$$

wobei n in das Innere des von der Stromlinie umschlossenen Bereiches weist. Damit gilt folgender Satz:

Rotiert ein Stern so rasch, daß

$$\chi^* \gtrsim A^*$$

und strebt er ein ausgezeichnetes Rotationsgesetz an, bei dem die Drehimpulsdichte Ω auf den Stromlinien der meridionalen Strömungen nahezu konstant ist und geht dann eine solche Stromlinie nirgends durch einen Bereich des Sterns, in dem Konvektion herrscht oder in dem $\varepsilon \neq 0$ ist, dann hat bei dem Rotationsgesetz, das der Stern anstrebt Ω in dem von der Stromlinie umschlossenen Gebiet ein Maximum.

In einem gewissen Sinn kann unser Ergebnis als ein Analogon eines von RANDERS (1941, S. 115) hergeleiteten Theorems angesehen werden, welches man erhält, wenn man Stationarität voraussetzt und $\eta = \text{konst.}$ annimmt. Dann verschwindet die rechte Seite von (62) und es folgt, daß dann Ω in keinem von einer Stromlinie eingeschlossenen Gebiet ein Extremum haben kann.

Wenn der Stern das in unserem Satz beschriebene Rotationsgesetz erreichen würde, dann gäbe es Bereiche, in denen ω mit wachsendem Achsenabstand rascher abnimmt als $1/s^2$. Das bedeutet aber, daß bei indifferenter Schichtung die Strömung dynamisch instabil ist. Bei

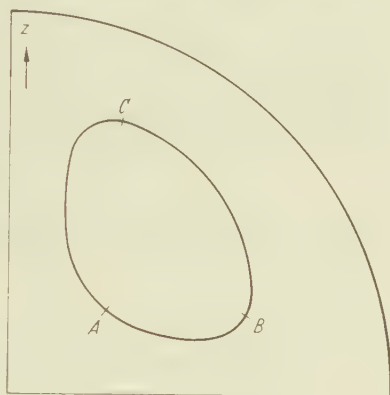


Abb. 6. Zur Abschätzung von $\int_L \eta\,dz$

thermisch stabiler Schichtung wird der instabilisierende Einfluß den stabilen Bereich etwas verkleinern. Die Einstellzeit, in der sich das Extremum ausbildet, ist gleich der Zeitskala der Reibung.

Der Verf. dankt Herrn Direktor Dr. W. STROHMEIER dafür, daß er seine Untersuchungen über rotierende Sterne an der Remeis-Sternwarte durchführen konnte. Für wertvolle Diskussionen ist der Verf. Herrn Prof. L. BIERMANN und seinen Mitarbeitern Dr. A. SCHLUTER und Dr. ST. TEMESVARY zu Dank verpflichtet. Verf. dankt ferner Herrn Prof. BIERMANN für die Möglichkeit eines halbjährigen Gast-Aufenthaltes am Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen und für die Bereitstellung der elektronischen Rechenmaschine G 1 für die numerischen Rechnungen und schließlich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Erstattung von Reisekosten.

Anhang

Wir stellen einige im Text benutzte Relationen für Kugelfunktionen zusammen und definieren einige dort benutzten Abkürzungen. Es sei $P_l(x)$ das l -te Legendresche Polynom von x . Wenn im Text P_l geschrieben ist, so ist stets $P_l(\cos\vartheta)$ gemeint. P_l erfüllt die folgende Identität

$$l(l+1) P_l \sin\vartheta + \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{dP_l}{d\vartheta} \right) = 0.$$

Wir definieren ferner die zugeordneten Kugelfunktionen durch

$$P_l^1 = -\frac{dP_l}{d\vartheta}.$$

Es sei $g(r, \vartheta)$ eine beliebige stetige Funktion von r, ϑ . Dann seien $(g)_l$ und $(g)_l^1$ definiert als die Entwicklungskoeffizienten

$$g_l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi g P_l \sin\vartheta d\vartheta, \quad (g)_l^1 = \frac{(2l+1)(l-1)!}{(l+1)!} \int_0^\pi g P_l^1 \sin\vartheta d\vartheta.$$

Ist $g(\vartheta) = g(\pi - \vartheta)$, so besitzt g eine Reihenentwicklung

$$g = \sum_{l=0}^{\infty} (g)_{2l} P_{2l},$$

ist $g(\vartheta) = -g(\pi - \vartheta)$, so lautet die Reihenentwicklung

$$g = \sum_{l=0}^{\infty} (g)_{2l}^1 P_{2l}^1.$$

Im Text benutzten wir ferner für Ausdrücke der Form $(P_i P_k g)_l$ das Symbol $(i, k; g)_l$ bzw. für $(P_i P_k g)_l^1$ das Symbol $(i, k; g)_l^1$. Ferner schreiben wir statt $(P_i P_k^1 g)_l$ einfach $(i, k; g)_l$ und anstelle von $(P_i P_k^1 g)_l^1$ einfach $(i, k; g)_l^1$. Allgemein bedeutet das, daß

$$(P_{i_1}, \dots, P_{i_l} P_{k_1}^1 \dots P_{k_n}^1 g)_l = (i_1, \dots, i_l, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n; g)_l,$$

$$(P_{i_1}, \dots, P_{i_l} P_{k_1}^1 \dots P_{k_n}^1 g)_l^1 = (i_1, \dots, i_l, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n; g)_l^1.$$

Wendet man den Laplaceschen Differentialoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

auf einen Ausdruck der Form $g(r) P_l$ an, so erhält man

$$\left(\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} g \right) P_l.$$

Wir definieren daher einen Operator Δ_l durch

$$\Delta_l = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2},$$

so daß $\Delta(g P_l) = (\Delta_l g) P_l$ wird.

Literatur

ALLEN, C. W.: *Astrophysical Quantities*. London 1955. — BIERMANN, L.: Beitrag zum IAU-Symposium über Kosmische Elektrodynamik. Stockholm 1956. — JEANS, J.: *Monthly Notices* **86**, 328 (1926). — KIPPENHAHN, R.: *Z. Astrophysik* **35**, 165 (1954). — KIPPENHAHN, R.: *Z. Astrophysik* **38**, 166 (1955). — MESTEL, L.: *Monthly Notices* **113**, 716 (1953). — ÖPIK, E. J.: *Monthly Notices* **111**, 278 (1950). — RANDERS, G.: *Astrophysic. J.* **94**, 109 (1941). — ROSSELAND, S.: *Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage*. Leipzig 1931. — SCHWARZSCHILD, M.: *Astrophysic. J.* **95**, 441 (1942). — SWEET, P. A.: *Monthly Notices* **110**, 548 (1950). — TEMESVÁRY, ST.: *Z. Naturforsch.* **7a**, 103 (1952).

Dr. RUDOLF KIPPENHAHN, München, Max-Planck-Institut für Physik,
Aumeisterstraße

Druck: Brühl'sche Universitätsdruckerei, Gießen

Lebenslauf

Ich, Rudolf Johann Kippenhahn, wurde am 24. Mai 1926 in Bähringen (Čechoslovakei) als Sohn des Berufsschuldirektors Rudolf Kippenhahn geboren. Ich besuchte die fünfklassige Volksschule in Abertham (1932—1937) und die Oberschulen in Graslitz (1937—1939) und St. Joachimsthal (1939—1945). Im März 1945 legte ich die Reifeprüfung ab. Während der Ferien der letzten Schuljahre und unmittelbar nach dem Abitur bis zu Beginn meines Studiums arbeitete ich als Hilfskraft an der Universitätssternwarte Berlin-Babelsberg, Abteilung Sonneberg, wo ich unter Anleitung von Prof. C. Hoffmeister mit einfachen astronomischen Beobachtungsmethoden, besonders auf dem Gebiet der veränderlichen Sterne, vertraut gemacht wurde. Im Februar 1946 begann ich an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg das Studium der Mathematik und Physik, übersiedelte zu Beginn des Wintersemesters 1948/49 an die Friedrich-Alexander-Universität Erlangen, wo ich 1950 die Diplom-Mathematiker-Prüfung ablegte. Ich promovierte 1951 mit einer unter Anleitung von Prof. W. Specht angefertigten Dissertation über ein algebraisches Problem mit den Nebenfächern Physik und Astronomie. Seit Juli 1951 bin ich Assistent an der Remeis-Sternwarte Bamberg; seit 1955 bin ich verheiratet. An der Bamberger Sternwarte beschäftigte ich mich einerseits als Beobachter mit dem Studium der veränderlichen Sterne, wobei ich mich unter anderem an der hier durchgeführten, planmäßigen Suche nach neuen Veränderlichen beteiligte. Zur Zeit führe ich lichtelektrische Beobachtungen an einem Bedeckungsveränderlichen aus. Andererseits ermöglichte mir Direktor Dr. W. Strohmeier innerhalb des Arbeitsprogramms der Remeis-Sternwarte theoretische Untersuchungen, die ich in engem wissenschaftlichen Kontakt mit Prof. L. Biermann und seinen Mitarbeitern vom Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, unter Benutzung der Göttinger elektronischen Rechenmaschine 61 ausführte und die sich hauptsächlich mit Problemen aus der Theorie der rotierenden Sterne befassen. In der ersten Hälfte des Jahres 1953 hatte ich Gelegenheit, ein halbes Jahr am Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen zu arbeiten. In dieser Zeit vollendeten Dr. A. Schlüter (Göttingen) und ich eine magnetohydrodynamische Theorie der Sonnenfilamente. Ferner war ich an der Aufstellung eines Rechenprogramms für vollautomatische Rechnungen zur Theorie der Sternentwicklung für die elektronische Rechenmaschine 62 beteiligt. Während meiner Göttinger Zeit hatte ich Gelegenheit, Vorlesungen und Seminare der Universitätssternwarte Göttingen zu besuchen.

Rudolf Kippenhahn

